

## 作业 10 振动

姓名: \_\_\_\_\_ ( )

班级: 高二电机电子( )

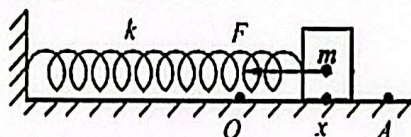
日期: \_\_\_\_\_

1. **机械振动**: 物体只在一平衡位置上下或左右往复的运动。

2. **产生振动的条件**: 运动物体具有回复力。

(振动的物体离开它的平衡位置时, 它会受到一个指向平衡位置的力, 这个力的作用使它回到原来的平衡位置)

3. **线性回复力 F**:  $k$  是弹簧的劲度系数、 $x$  是弹簧的伸长量。



$$F = -kx$$

**虎克定律**: 在弹性限度A内, 弹簧的伸长量 $x$ 与弹簧所受的外力/合外力 $f$ 成正比。

$$f \propto x$$

$$f = kx$$

4. 一根竖直悬挂的弹簧, 在其下端挂 0.2kg 的重物时, 弹簧的长度为 0.5m; 换挂 0.4kg 的重物时、弹簧的长度为 0.6m。

(a) 求弹簧原长和它的劲度系数。

(b) 如果此弹簧在弹性限度内的最大伸长量是 0.3m, 那么在此弹簧下端悬挂的重物不可超过多少 kg?

$$(a) F = kx$$

$$(0.2)(9.8) = k(0.5 - l_0)$$

$$(0.4)(9.8) = k(0.6 - l_0)$$

$$\therefore l_0 = 0.4m, k = 19.6 N/m$$

$$(b) F = kx$$

$$m(9.8) = (19.6)(0.3)$$

$$m = 0.6 kg$$

5. 有两根完全相同的轻质弹簧。劲度系数  $k$  均是 20N/m。

(a) 如图(a)所示, 把两根弹簧串联后再在下端悬挂 0.2kg 的重物, 则两根弹簧的伸长量各是多少?

(b) 如图(b)所示, 把两根弹簧并联后再在下端悬挂 0.2kg 的重物, 则两根弹簧的伸长量各是多少?

$$(a) x = x_1 + x_2$$

$$F = F_1 = F_2$$

$$\therefore \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

$$\therefore F = kx$$

$$mg = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)^{-1} (2x_1)$$

$$\therefore x_1 = 0.1m$$

$$(b) F = F_1 + F_2$$

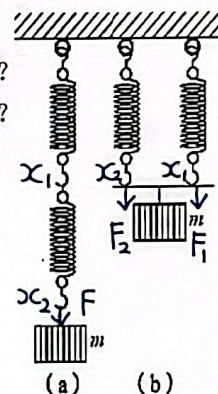
$$x = x_1 = x_2$$

$$\therefore k = k_1 + k_2$$

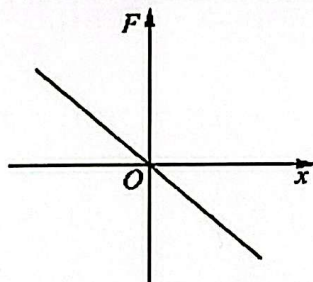
$$\therefore F = kx$$

$$mg = (k_1 + k_2)(x_1)$$

$$\therefore x_1 = 0.05m$$



6. **简谐运动**: 物体所受的回复力为线性回复力。则在线性回复力的作用下, 物体将做的振动称为简谐运动。



回复力  $F$  与位移  $x$  的关系图



7. 弹簧振子:

振幅 A: 振动物体离开平衡位置 0 的最远距离。

$$F = -kx \quad x = A \cos \omega t$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin \omega t$$

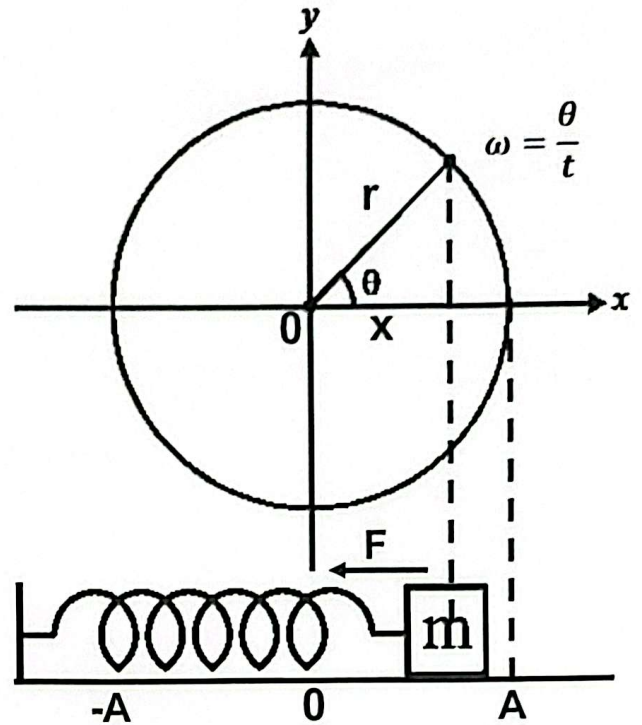
$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos \omega t = -\omega^2 x$$

$$F = ma \Rightarrow -kx = ma \Rightarrow a = -\frac{k}{m}x$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad f = \frac{1}{T} \quad \therefore T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

频率 f: 每一秒的振动次数, 单位 Hz。

周期 T: 一次全振动所需的时间, 单位 s。



8. 一个水平振动的弹簧振子, 已知其劲度系数为 60N/m, 振子的质量是 0.2kg, 振幅是 2cm。不计空气阻力和摩擦阻力。求:

(a) 振子的周期 T。

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{0.2}{60}} \\ &= 0.36 \text{ s} \end{aligned}$$

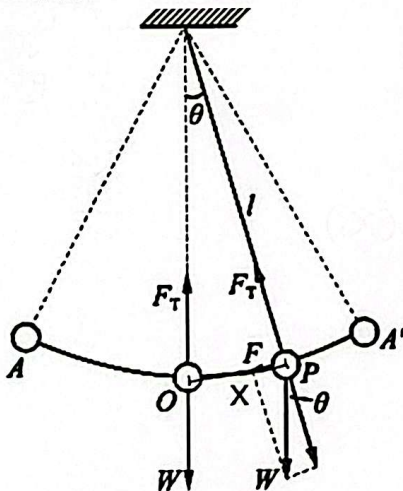
(b) 振子的最大速度 v。

$$\begin{aligned} v &= \omega A \sin \omega t \\ v_{\max} &= \omega A \\ &= \sqrt{\frac{k}{m}} A \\ &= \sqrt{\frac{60}{0.2}} \cdot 0.02 \\ &= 0.35 \text{ m/s} \end{aligned}$$

(c) 振子的最大加速度 a。

$$\begin{aligned} a &= \omega^2 A \cos \omega t \\ a_{\max} &= \omega^2 A \\ &= \frac{k}{m} A \\ &= \frac{60}{0.2} \cdot 0.02 \\ &= 6 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

9. 单摆:



振幅 A: 振动物体离开平衡位置 0 的最远距离。

$$F = -kx \quad x = A \cos \omega t$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin \omega t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos \omega t = -\omega^2 x$$

$$F = ma \Rightarrow -mg \sin \theta = ma \Rightarrow a = -\frac{g}{l} x \quad \therefore \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\therefore F = -kx = ma = m \left( -\frac{g}{l} x \right) = -\frac{mg}{l} x \Rightarrow k = \frac{mg}{l}$$

当  $\theta$  很小时,  
 $\sin \theta \approx \theta$ , 而  $\theta = \frac{x}{l}$

频率 f: 每一秒的振动次数, 单位 Hz。  $f = \frac{1}{T} \quad \therefore T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

周期 T: 一次全振动所需的时间, 单位 s。



作业 10.2 振动

姓名: \_\_\_\_\_ ( )

班级: 高二电机电子( )

日期: \_\_\_\_\_

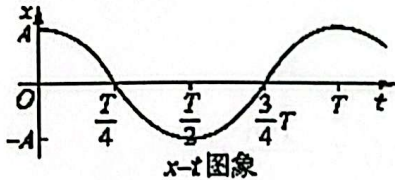
10. 著名的傅科摆可以看成是摆长为 67.15m 的一个单摆, 试问: 这个摆的周期大约为多少?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

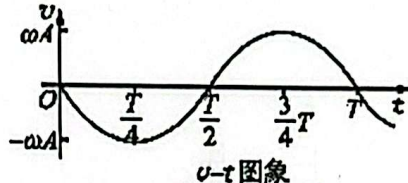
$$= 2\pi\sqrt{\frac{67.15}{9.8}}$$

$$= 16.45 \text{ s}$$

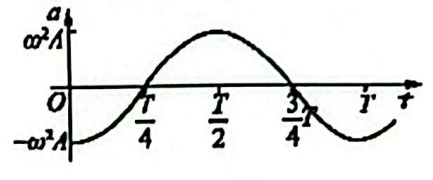
11. 振动图像:



$$x = A \cos \omega t$$



$$v = -\omega A \sin \omega t$$



$$a = -\omega^2 A \cos \omega t$$

12. 图是一质点做简谐运动的因象, 请根据图象中的信息回答下列问题:

(a) 质点离开平衡位置的最大距离是多少?

$$A = 10 \text{ cm}$$

(b) 质点在第 2s 末的位移是多少?

$$x = 0$$

(c) 质点在前 2s 内经过的路程是多少?

$$S = 20 \text{ cm}$$

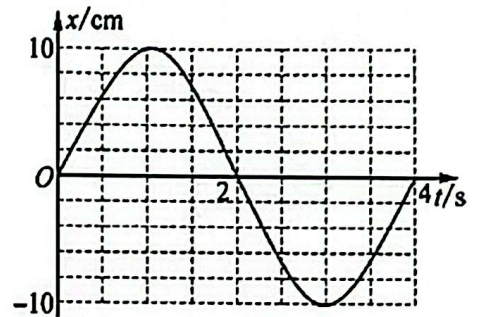
(d) 在第 1.5s 和第 2.5s 这两个时刻, 质点向哪个方向运动?

向下振动

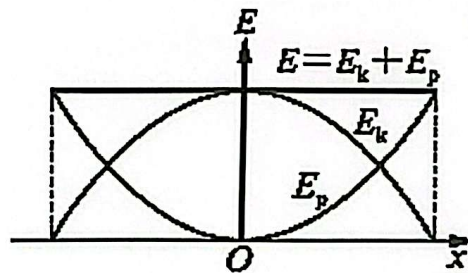
(e) 质点相对平衡位置的位移方向与它的瞬时速度方向在哪些时间内是相同的? 在哪些时间内是相反的?

相同: 0-1s, 2-3s

不相同: 1-2s, 3-4s



13. 简谐运动的能量:



振子在平衡位置时:  $v_{\max}$   
在振幅 A 时:  $v = 0$

14. 弹簧振子的机械能:

动能  $E_k$ :

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t$$

弹性势能  $E_p$ :

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \omega t$$

总机械能  $E = E_k + E_p$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \omega t$$

$$= \frac{1}{2}kA^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)$$

$$= \frac{1}{2}kA^2$$



15. 单摆的机械能:

动能  $E_k$ :  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$     重力势能  $E_p$ :  $E_p = mgh$     总机械能  $E$ :  $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$

16. 一个弹簧振子沿水平方向振动, 外界阻力忽略不计, 已知弹簧的劲度系数  $k=400\text{N/m}$ , 振子的质量  $m=1\text{kg}$ , 振幅  $A=2\text{cm}$ 。求振子在  $x=1\text{cm}$  时的势能、动能和机械能。

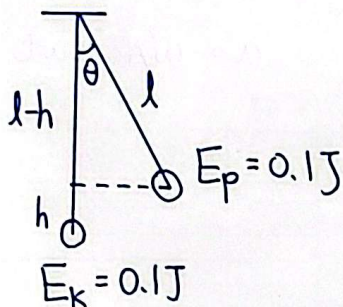
$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \times 400 \times 0.01^2 = 2 \times 10^{-2} \text{J}$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2} \times 400 \times 0.02^2 = 8 \times 10^{-2} \text{J}$$

$$E = E_k + E_p \quad 8 \times 10^{-2} = E_k + 2 \times 10^{-2}$$

$$\therefore E_k = 6 \times 10^{-2} \text{J}$$

17. 单摆的摆球质量  $m=50\text{g}$ , 摆长  $l=1\text{m}$ , 推一下摆球, 使它获得动能  $E_k=0.1\text{J}$ , 它偏离竖直方向的角度能达到多大? (取  $g=10\text{m/s}^2$ )



$$E_p = E_k$$

$$mgh = 0.1$$

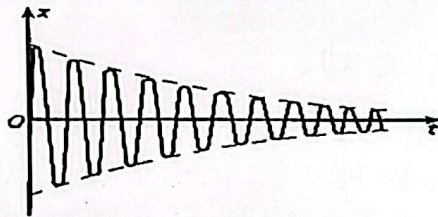
$$0.05 \times 10 \times h = 0.1$$

$$\therefore h = 0.2\text{m}$$

$$\cos \theta = \frac{l-h}{l} = \frac{0.8}{1}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1} 0.8 = 36.87^\circ$$

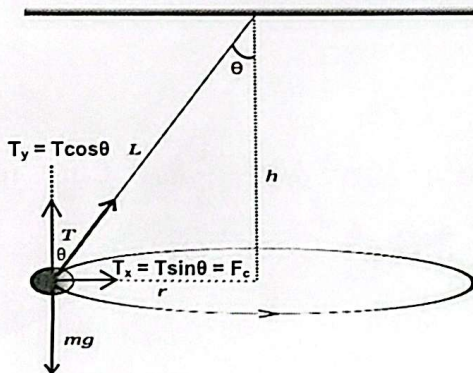
18. 阻尼振动: 振动的物体要克服阳尼做功, 振动的能量逐渐减少, 振幅逐渐减小。



受迫振动: 物体在周期性外力作用下所做的振动。

共振: 当驱动力的频率等于振动系统的固有频率时, 振动的振幅最大。应用于磁共振成像 MRI、音叉共振、收音机接受电台频率。

19. 圆锥摆: 圆锥摆是一个固定在一根悬挂在中心点上的绳子的重物。其结构与单摆类似, 但重物并不是像单摆一样来回摆动, 而是以一个恒定的速率在水平面上做圆周运动, 并和细绳一起, 画出圆锥的轨迹。



$$T \sin \theta = F_c = \frac{mv^2}{r}, \quad T \cos \theta = mg$$

$$\therefore \frac{mg}{\cos \theta} = \frac{mv^2}{r \sin \theta}$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{gr \sin \theta}{\cos \theta}}$$

$$\text{速率 } v = \frac{\text{路程 } s}{\text{时间 } t} = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v}$$

$$= \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{gr \sin \theta}{\cos \theta}}} = 2\pi r \sqrt{\frac{\cos \theta}{gr \sin \theta}} = 2\pi r \sqrt{\frac{\cos \theta}{gr(\frac{1}{2})}}$$

$$\therefore \text{周期 } T = 2\pi \sqrt{\frac{L \cos \theta}{g}} \quad f = \frac{1}{T}$$

