1. 一个立方体只有3对不相邻的面，因此只有3种方法。

2. 自然数中，除了2之外，其他的质数都是奇数，因此，他们的个位数只能是1，3，5，7，9。

   除了5之外，其他个位数是5的数都能被5整除，因此不是质数。

   因此，自然数中，只有2，5这两个质数的个位数不是1，3，7，9。

3. 按照比例，5个人可在50天内制作$\dfrac{50}{5}\times 5=50$件玩具。

4. 若一三角形的每边增加至原来的三倍，则它的底与高都增加至原来的3倍，因此，面积增加至原来的$3\times 3=9$倍，变为$90\ \mathrm{m}^2$。

5. 若立方体的边长与球的直径一样，则球可以刚好内嵌在立方体中，因此立方体体积较大。

6. 一个数能被3整除，若且唯若它的数字之和能被3整除。但$2+5+6=13$不能被3整除，因此没有任何由2，5，6这三个数字所组成的数字不重复的三位数能被3整除。

7. 面积的可能值有1，2，3，4，5，6，7，8，10，12，14，9，15，18，21，16，20，24，28，25，30，35，36，42，49这25个。

8. 设$k=2x$，则$\dfrac{55}{x}=\dfrac{110}{k}$。因此，$k$是整数，$\dfrac{110}{k}$也是整数。这表示$k$是110的因数。

   $110=2\times 5\times 11$一共有$2\times 2\times 2=8$个因数，因此x有8个可能值。

9. 设第3边的长为n，则由三角形的两边之和须大于第三边可得:

   $$n+2011>2017$$
   $$2011+2017>n$$

   即 $6<n<4028$

   因此，n可以是由7到4027的整数，共有4021个。

10. 第一个数字不可以是 0，因此有 6 种可能。

然后，第二个数字可以是剩下的 6 个数字中任意一个，有 6 种可能。

第三个数字可以是剩下的 5 个数字中任意一个，有 5 种可能。

依次类推。

因此，满足条件的整数有$6\times6\times5\times4\times3\times2\times1=4320$个。

11. $2017^{2017}\equiv7^{2017}\quad\text{mod }10$

$7^1\equiv7\quad\text{mod }10$

$7^2\equiv9\quad\text{mod }10$

$7^3\equiv3\quad\text{mod }10$

$7^4\equiv1\quad\text{mod }10$

$2017^{2017}\equiv7^{4\times504+1}\equiv\left(7^4\right)^{504}\times7\equiv7\quad\text{mod }10$

因此，2017^{2017}的个位数是 7。

12. 设蜡烛的长是L，则点燃x小时后，

红色蜡烛的长是$L-\frac{x}{6}L=\left(1-\frac{x}{6}\right)L$，

黄色蜡烛的长是$L-\frac{x}{3}L=\left(1-\frac{x}{3}\right)L$。

$$1-\frac{x}{6}=2\left(1-\frac{x}{3}\right)$$

$$\frac{x}{2}=1$$

$$x=2$$

$$60x=120$$

13. 设小明在前面$(n-1)$次考试的总分是x。

$$\frac{x+100}{n}=90\qquad------\ (1)$$

$$\frac{x+60}{n}=85\qquad------\ (2)$$

$(1)-(2)$得：$\frac{40}{n}=5$

$\therefore\quad n=8$

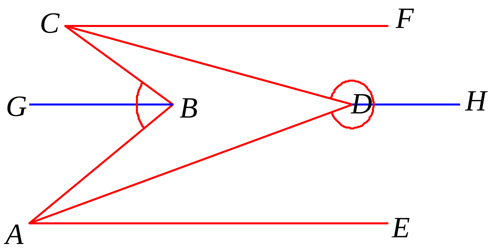
14. 设红宝石上星期的价格是a，则这星期的价格是$\frac{11}{10}a$，因此，a是可以被10整除的整数。

设蓝宝石上星期的价格是b，则这星期的价格是$\frac{9}{10}b$。因此，b也是可以被10整除的整数。

$$\frac{11}{10}a=\frac{9}{10}b$$
$$11a=9b$$

因此，b也必须能被11整除。所以b的最小可能值是10与11的最小公倍数，即110。

15.



设$\angle FCD=\alpha$，$\angle EAD=\beta$，则$\angle FCB=2\alpha$，$\angle EAB=2\beta$。

作$BG//AE//CF//DH$。

$$\begin{aligned}y^\circ &= \angle HDC+\angle HDA\\ &=180^\circ-\alpha+180^\circ-\beta\\ &=360^\circ-(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

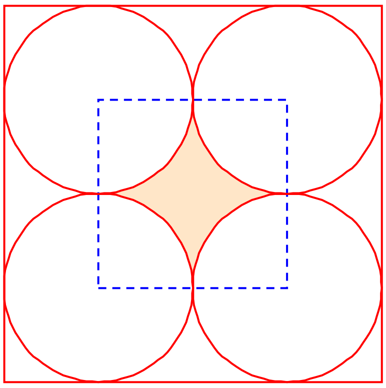
$$\begin{aligned}x^\circ &= \angle CBG+\angle ABG\\ &=2\alpha+2\beta\\ &=2(360^\circ-y^\circ)\\ &=2(360^\circ-324^\circ)\\ &=72^\circ\end{aligned}$$

$$x=72$$

16. 设小明答对x题，答错$100-x$题，则

$$\begin{aligned}8(100-x)-5x&=7\\ 13x&=793\\ x&=61\end{aligned}$$

17.



如图所示，阴影部分是由一个边长为 6 的正方形去掉 4 个半径等于 3 的 $\frac{1}{4}$ 圆而得，因此，其面积 $=6^2-\pi\times3^2=36-9\pi$ 。

因此，$a=36$ ，$b=-9$ ，$a+b=27$ 。

18. 由 1 到 2017 的整数中，

有 $\left\lfloor\frac{2017}{7}\right\rfloor=288$ 个能被 7 整除，

有 $\left\lfloor\frac{2017}{35}\right\rfloor=57$ 个即能被 7 整除，也能被 5 整除。

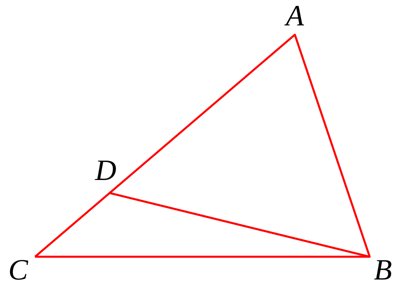
因此，有 $288-57=231$ 个能被 7 整除，不能被 5 整除。

19. $5^{20}\times4^{17}=5^{20}\times2^{34}=2^{14}\times10^{20}$

$2^{14}=2^{10}\times2^4=1024\times16$ 有 5 位数

因此，$5^{20}\times4^{17}$ 有 $20+5=25$ 位数。

20.



设 $\angle ACB=\alpha$，则 $\angle ABC=\alpha+42^\circ$，

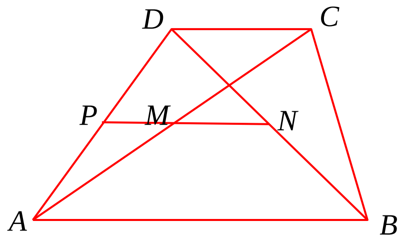
$$\angle A=180^\circ-\alpha-\alpha-42^\circ$$

$$\angle ADB=\angle ABD=\frac{180^\circ-\angle A}{2}=\alpha+21^\circ$$

$$\therefore\quad \angle CBD=\angle ABC-\angle ABD=\alpha+42^\circ-\alpha-21^\circ=21^\circ$$

$$x=21$$

21.



延长 NM 与 AD 相较于点 P，则 $PN // AB$，

$$PN=\frac{1}{2}AB=512$$

$$\therefore\quad PM=512-124=388$$

$$CD=2PM=776$$

22. 最糟糕的情况是前面拿出的20只都是蓝色。因此，须拿出至少22只袜子，才能保证至少有两只蓝袜与两只红袜。

23. $a_1=1$

$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n=n^3$

$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}=(n-1)^3=n^3-3n^2+3n-1$

$\therefore\quad a_n=3n^2-3n+1$

$\therefore\quad a_{100}=30000-300+1=29701$

a_{100}的最后三位数是701。

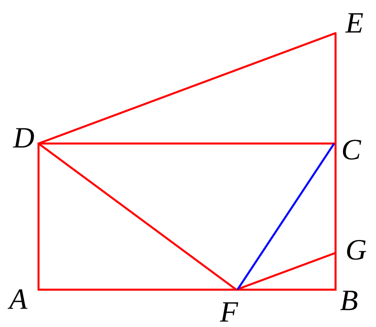
24. 若p，q是方程式$x^2-1001x+n=0$的整数根，

$$x^2-1001x+n=(x-p)(x-q)$$
$$=x^2-(p+q)x+pq$$

因此，$p+q=1001$，$pq=n$。因此，p，q同是正整数。则p可以等于由1到1000的整数，$q=1001-p$。

但$(p,1001-p)$与$(1001-p,p)$所对应的n是一样的。因此$n=k(1001-k)$，其中k可以等于由1到500的整数，所以n的可能值有500个。

25.



ΔCDF的面积$=\dfrac{1}{2}\times 240=120$

ΔBCF的面积$240-120-90=30$

$$\frac{BG}{CG}=\frac{BG}{CE}=\frac{BF}{CD}=\frac{BF}{AB}=\frac{S_{\Delta BCF}}{S_{\Delta ADF}+S_{\Delta BCF}}=\frac{30}{120}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{S_{\Delta BGF}}{S_{\Delta BCF}}=\frac{BG}{BC}=\frac{1}{5}$$

$\therefore\quad \Delta BGF$ 的面积等于6。

26\. 设a，b 是正整数使得$n+100=a^2$，$n-24=b^2$，则$a>b$，

$$a^2-b^2=124$$
$$(a+b)(a-b)=2^2\times 31$$

$a+b$与$a-b$必须同为奇数或同为偶数。因此，

$$a+b=62$$
$$a-b=2$$

由此得：$a=32$，$b=30$，$n=30^2+24=924$。

27\. $$6n-10-n^2=-(n-3)^2-1<0$$

$$\therefore\quad \left|6n-10-n^2\right|=n^2-6n+10$$

$$\frac{\left|6n-10-n^2\right|+10n-6-n^2}{n^2-1}=\frac{1}{100}$$
$$\frac{n^2-6n+10+10n-6-n^2}{(n+1)(n-1)}=\frac{1}{100}$$
$$\frac{4n+4}{(n+1)(n-1)}=\frac{1}{100}$$
$$\frac{4}{n-1}=\frac{1}{100}$$
$$n-1=400$$
$$n=401$$

28\. 设$x=ab$，$y=cd$，它们是二位数。依题意，

$$100y+x-50=3(100x+y)$$
$$97y-299x=50$$

我们注意到，

$$97\times 3-299=-8$$
$$97\times 4-299=89$$

因此，

$$97\times(4+3k)-299(1+k)=89-8k$$

当$k=11$，

$$97\times 37-299\times 12=1$$

因此，

$$97\times(37\times 50+299m)-299\times(12\times 50+97m)=50$$

由于97 与299 互质，

$y=299m+1850=299(m+6)+56$

$x=600+97m=97(m+6)+18$

只有当$m=-6$，x与y才是二位数。

因此，$x=18$，$y=56$，支票上原来的金额是1856，最后三位数是856。

29. 有30人的眼睛没受伤，25人的耳朵没受伤，15人的脚没受伤，20人的手没受伤。

因此，至少有一样没受伤的人最多有$30+25+15+20=90$人。

因此，四样都受伤的人至少有10人。

30. 我们注意到，大立方体里有$(n-2)^3$个小立方体在内部，是不会被漆到的。因此，

$$(n-2)^3<210<n^3$$

所以$n-2\le 5$且$n\ge 6$。因此，n只可以是6或7。

若$n=6$，有$6^3-210=6$个小立方体是有红漆的。由于每一个面有$6^2=36$个小立方体，这是不可能的。

若$n=7$，有$7^3-210=133$个小立方体是有红漆的。大立方体里面的$5^3=125$个小立方体是没有红漆的。因此，大立方体的外面有$210-125=85$个小立方体也没有红漆。由于大立方体每一个面有$7^2=49$个小立方体，因此至少有3个面有红漆，至多只有4个面有红漆。

若有3个面有红漆，这三个面可能两两相邻，可能是第一个与第二个相邻，第二个与第三个相邻，但第一个与第三个不相邻。第一种情况下，有127个小立方体有红漆，与题意不符。在第二种情况下，有133个小立方体有红漆，符合题意。

若有4个面有红漆，没有红漆的面可能相邻，也可能不相邻。在第一种情况下，在大立方体外面，有55个小立方体没有红漆，与题意不符。在第二种情况下，在大立方体外面，有50个小立方体没有红漆，与题意不符。

因此，唯一可能的情形是$n=7$，有三个面被漆成红色。这三个面，第一个与第二个相邻，第二个与第三个相邻，但第一个与第三个不相邻。因此，其中有14个小立方体，刚好有两个面有红漆。