

~~ 说明 ~~

~~ Notes ~~

在这份试卷中, $\lfloor x \rfloor$ 表示小于或等于 x 的最大整数。

例如: $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor -2 \rfloor = -2$, $\lfloor 2.6 \rfloor = 2$, $\lfloor -2.6 \rfloor = -3$ 。

In this paper, $\lfloor x \rfloor$ denotes the greatest integer less than or equal to x .

For example, $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor -2 \rfloor = -2$, $\lfloor 2.6 \rfloor = 2$, $\lfloor -2.6 \rfloor = -3$.

第 1 至第 10 题, 选择题, 每题 4 分。

Question 1 to Question 10, multiple choice questions, each question carries 4 marks.

1. 求 0.0125×8000 。

Find 0.0125×8000 .

A. 0.1 B. 1 C. 10 D. 100 E. 1000

$$\begin{aligned} 0.0125 \times 8000 &= \frac{125}{10000} \times 8000 \\ &= \frac{1000}{10} \\ &= 100 \end{aligned}$$

答: 【D】

2. 化简 $3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}}$ 。

Simplify $3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}}$.

A. $\frac{361}{115}$ B. $\frac{345}{113}$ C. $\frac{363}{115}$ D. $\frac{355}{115}$ E. $\frac{355}{113}$

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}} = 3 + \frac{1}{\frac{16 \times 7 + 1}{16}} = 3 + \frac{16}{113} = \frac{3 \times 113 + 16}{113} = \frac{355}{113}$$

答: 【E】

3. 今天是星期六, 150 天之后是_____。

Today is Saturday. 150 days later is _____.

- A. 星期天 B. 星期一 C. 星期二 D. 星期三 E. 星期四
 Sunday Monday Tuesday Wednesday Thursday

150 除以 7 余 3。

因此, 150 天后是星期二。

答: 【C】

4. 一物品若按标价的 80% 出售将获利 20%, 若按标价出售, 则获利的百分比是多少?

An item, if sold at 80% of the marked price, gives a profit of 20%. If the item is sold at the marked price, what is the profit in percentage?

- A. 30% B. 40% C. 45% D. 50% E. 60%

设物品的原价是 x , 标价是 y , 则

$$0.8y = 1.2x$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1.2}{0.8} = 1.5$$

这表示若按标价出售将获利 50%。

答: 【D】

5. 求 $\left\lfloor -\frac{100}{33} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{33} \right\rfloor$ 。

Find $\left\lfloor -\frac{100}{33} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{33} \right\rfloor$.

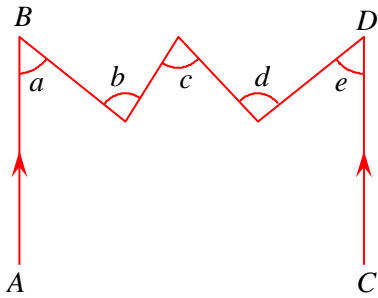
- A. -2 B. -1 C. 0 D. 1 E. 2

$$\left\lfloor -\frac{100}{33} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{33} \right\rfloor = -4 + 3 = -1$$

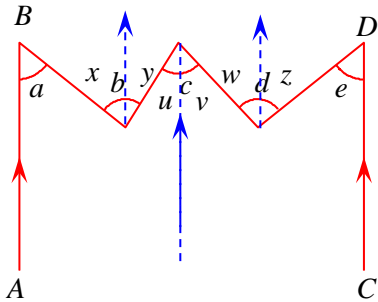
答: 【B】

6. 下图中, $AB \parallel CD$ 。若 $a+b+c+d+e=310^\circ$, $b+c+d=228^\circ$, 求 $\angle c$ 。

In the figure below, $AB \parallel CD$. If $a+b+c+d+e=310^\circ$, $b+c+d=228^\circ$, find $\angle c$.



- A. 114° B. 82° C. 76° D. 74° E. 73°



$$x+y=b, \quad u+v=c, \quad w+z=d$$

$$x=a, \quad y=u, \quad w=v, \quad z=e$$

$$a+e=310^\circ-228^\circ=82^\circ$$

$$228^\circ=b+c+d$$

$$=x+y+u+v+w+z$$

$$=a+e+2c$$

$$2c=228^\circ-82^\circ=146^\circ$$

$$c=73^\circ$$

答: 【E】

7. 已知两个正整数的乘积是 4320，最大公因数是 12。求这两个数的最小公倍数。

Given that the product of two positive integers is 4320, and their greatest common divisor is 12. Find the least common multiple of these two numbers.

A. 360 B. 720 C. 1080 D. 2160 E. 4320

设这两数为 $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ ， $n = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k}$ ，其中 p_1, p_2, \dots, p_k 是相异的质数。

因此， $12 = p_1^{\min\{a_1, b_1\}} p_2^{\min\{a_2, b_2\}} \dots p_k^{\min\{a_k, b_k\}}$

若 x 是 m 与 n 的最小公倍数，则

$$x = p_1^{\max\{a_1, b_1\}} p_2^{\max\{a_2, b_2\}} \dots p_k^{\max\{a_k, b_k\}}$$

由于 $\max\{a_i, b_i\} + \min\{a_i, b_i\} = a_i + b_i$ ，

$$12x = p_1^{a_1+b_1} p_2^{a_2+b_2} \dots p_k^{a_k+b_k} = mn = 4320$$

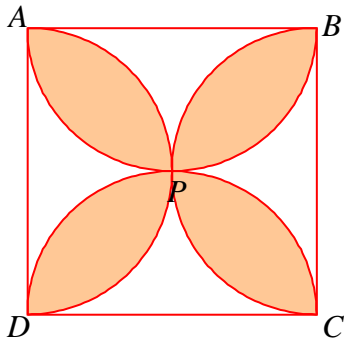
(事实上，以上是证明两个数的最大公因数与最小公倍数的乘积等于两个数的乘积。)

因此， $x = \frac{4320}{12} = 360$ 。

答：【A】

8. 下图中, $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, 弧 \widehat{APB} , \widehat{BPC} , \widehat{CPD} 及 \widehat{DPA} 是半圆。若半圆 \widehat{APB} 与直线 AB 所围成的面积是 S , 求阴影部分的面积。

In the figure below, $ABCD$ is a square with side length 1. The arcs \widehat{APB} , \widehat{BPC} , \widehat{CPD} and \widehat{DPA} are semi-circles. If the area enclosed between the semi-circle \widehat{APB} and the line AB is S , find the area of the shaded region.



- A. $\frac{1}{2}$ B. $4S - 1$ C. $1 - 2S$ D. S E. $\frac{2}{3}$

阴影部分的面积 = 4 个半圆的面积 - 正方形的面积
 $= 4S - 1$

答: 【B】

9. 不大于 200 的正整数中, 有多少个可以被 2 或 5 整除?
 Among the positive integers not larger than 200, how many of them are divisible by 2 or 5?

- A. 100 B. 108 C. 120 D. 128 E. 140

不大于 200 的正整数中,

可以被 2 整除的有 $\frac{200}{2} = 100$ 个;

可以被 5 整除的有 $\frac{200}{5} = 40$ 个;

可以同时被 2 或 5 整除的, 就是可以被 10 整除的, 有 $\frac{200}{10} = 20$ 个;

可以被 2 或 5 整除的有 $100 + 40 - 20 = 120$ 个。

答: 【C】

10. 若 $x^3 = 2015 \times 2017 \times 2019 + 4 \times 2017$, 求 x 。

If $x^3 = 2015 \times 2017 \times 2019 + 4 \times 2017$, find x .

A. 2017 B. 2018 C. 2019 D. 2020 E. 2021

$$\begin{aligned} x^3 &= 2015 \times 2017 \times 2019 + 4 \times 2017 \\ &= 2017 \times (2017 - 2) \times (2017 + 2) + 4 \times 2017 \\ &= 2017 \times (2017^2 - 4) + 4 \times 2017 \\ &= 2017^3 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 2017$$

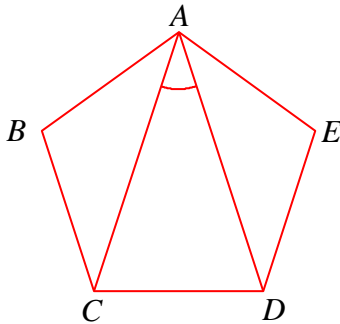
答: 【A】

第 11 至第 20 题, 问答题, 每题 5 分。

Question 11 to Question 20, short questions, each question carries 5 marks.

11. 下图中, $ABCDE$ 是正五边形。若 $\angle CAD = x^\circ$, 求 x 。

In the figure below, $ABCDE$ is a regular pentagon. If $\angle CAD = x^\circ$, find x .



$$\angle BAE = \frac{3 \times 180^\circ}{5} = 108^\circ$$

同样的, $\angle ABC = 108^\circ$

$$BA = BC$$

$$\angle BAC = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$$

同样的, $\angle EAD = 36^\circ$

$$\therefore x = 108 - 36 - 36 = 36$$

答: 【36】

12. 求满足不等式 $4 \leq 999 - 3x < 1000$ 的最大整数 x 。

Find the largest integer x that satisfies the inequality $4 \leq 999 - 3x < 1000$.

$$4 \leq 999 - 3x < 1000$$

$$-1 < 3x \leq 995$$

$$-\frac{1}{3} < x \leq 331\frac{2}{3}$$

答：【331】

13. 求 $\frac{3\sqrt{3}+5}{3\sqrt{3}-5} + \frac{3\sqrt{3}-5}{3\sqrt{3}+5}$ 的值。

Find the value of $\frac{3\sqrt{3}+5}{3\sqrt{3}-5} + \frac{3\sqrt{3}-5}{3\sqrt{3}+5}$.

$$\frac{3\sqrt{3}+5}{3\sqrt{3}-5} + \frac{3\sqrt{3}-5}{3\sqrt{3}+5} = \frac{2(27+25)}{27-25} = 52$$

答：【52】

14. 若三位数 $\overline{2a7}$ 可以被 11 整除，求 a 的值。

If the three digit number $\overline{2a7}$ is divisible by 11, find the value of a .

$$\overline{2a7} = 2 \times 10^2 + a \times 10 + 7 \equiv 2 \times (-1)^2 + a \times (-1) + 7 \pmod{11}$$

由于 $\overline{2a7}$ 可以被 11 整除， $2 - a + 7 \equiv 0 \pmod{11}$

因此， $a = 9$ 。

答：【9】

15. 下课时，1001 位学生去食堂，每位男生吃了两碗饭，每位女生吃了一碗饭，结果这些学生一共吃了 1654 碗饭。问女生有几人？

During recess time, 1001 students went to canteen. Each boy ate two bowls of rice, and each girl ate one bowl of rice. A total of 1654 bowls of rice were consumed by the students.

How many girls were there?

因为每位男生吃两碗饭，每位女生吃一碗，男生有 $1654 - 1001 = 653$ 人。

因此，女生有 $1001 - 653 = 348$ 人。

答：【348】

16. 有一群学生，其中 $\frac{1}{3}$ 是男生。女生中，有 $\frac{3}{8}$ 戴眼镜。若没有戴眼镜的女生有 45 人，问这群学生有多少人？

In a group of students, $\frac{1}{3}$ of them are boys, and $\frac{3}{8}$ of the girls wear glasses. If there are 45 girls who do not wear glasses, how many students are there in this group?

$\frac{2}{3}$ 的学生是女生， $\frac{2}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{12}$ 的学生是没戴眼镜的女生。

因此，这群学生有 $\frac{45}{\frac{5}{12}} = 108$ 人。

答：【108】

17. 架子上有 23 盒蓝色原子笔及 17 盒红色原子笔。每个盒子都密封着，盒子的表面完全一样，没有注明里面所含原子笔的颜色。林老师赶着去上课，却需要一盒红色原子笔。因此她打算先拿走若干盒原子笔，去到班上才打开找一盒红色的。林老师必须取走最少多少盒原子笔，才能保证至少有一盒是红色的？

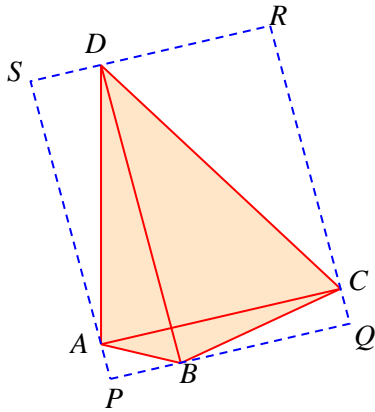
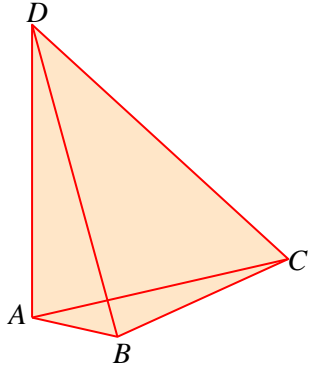
There are 23 boxes of blue pens and 17 boxes of red pens on a shelf. Each box is sealed and the exterior of the boxes are identical. There is no indication on the boxes about the colour of the pens inside. Ms Lin is rushing to her class, but she needs a box of red pens. Therefore, she plans to take away a few boxes of pens, and only opens them in the class to find a box of red pens. At least how many boxes of pens should Ms Lin take with her in order to make sure that she has at least one box of red pens?

如果林老师拿走 23 盒，最差的情况，这 23 盒都是蓝色的。因此，林老师必须至少拿走 24 盒。

答：【24】

18. 如下图所示， $ABCD$ 是一四边形，其对角线 AC 与 BD 互相垂直。若 $AC = 19$ ， $BD = 22$ ，求四边形 $ABCD$ 的面积。

As shown in the figure below, $ABCD$ is a quadrilateral. The diagonals AC and BD are perpendicular. If $AC = 19$, $BD = 22$, find the area of quadrilateral $ABCD$.



分别过点 B 及点 D 作 PQ 与 SR 平行于 AC 。

分别过点 A 及点 C 作 PS 与 QR 平行于 BD 。

则 $PQRS$ 是长方形， $PQ = 19$ ， $PS = 22$ 。

四边形 $ABCD$ 的面积是长方形 $PQRS$ 的一半，即 $\frac{19 \times 22}{2} = 209$ 。

答：【209】

19. 将 4 支一样的蓝笔与 3 支一样的红笔排成一行，其中 3 支红笔必须相邻，有几种排法？
How many ways are there to arrange 4 identical blue pens and 3 identical red pens in a row if the 3 red pens must be next to each other?

将 3 支红笔看成一支，这等于要排 4 蓝 1 红五支笔。要从 5 个位置选一个给红笔，有 5 种方法。

答：【5】

20. 考完试后，老师计算班上学生的平均分数，得平均分数为 70 分。后来发现少算了一位考 87 分的学生李大卫的成绩。重新计算及确认后得全班的平均分数是 71 分。问这班上 (包括李大卫) 有多少位学生?

After an examination, the teacher computed the average mark scored by her students in the class to be 70. Later, the teacher found out that she has left out David Lee who scored 87. After a second calculation and a thorough checking, it was found that the average mark scored by all the students in the class is 71. How many students are there in this class (including David Lee)?

设这班学生有 x 人，则 $71x$ 是班上学生的总分， $70(x-1)$ 是除了李大卫之外，其他学生的总分。因此，

$$71x - 70(x-1) = 87$$

$$x + 70 = 87$$

$$x = 17$$

答：【17】

第 21 至第 25 题，问答题，每题 6 分。

Question 21 to Question 25, short questions, each question carries 6 marks.

21. 一班里有 27 位学生，编号 1 到 27。老师给每一位学生发铅笔，1 号学生发 1 支，2 号学生发 3 支，3 号学生发 5 支，4 号学生发 7 支，依此类推。问老师一共发了多少支铅笔？

There are 27 students in a class, numbered 1 to 27. A teacher distributes pencils to the students. Student no. 1 is given 1 pencil, student no. 2 is given 3 pencils, student no. 3 is given 5 pencils, student no. 4 is given 7 pencils, and so on. What is the total number of pencils distributed by the teacher?

27 号同学会得到 $2 \times 27 - 1 = 53$ 支铅笔。

设 N 为老师所发的铅笔总数。

$$N = 1 + 3 + \dots + 51 + 53$$

倒过来写：

$$N = 53 + 51 + \dots + 3 + 1$$

两式加起来：

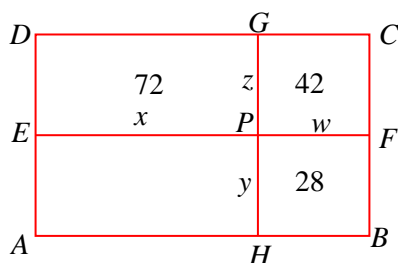
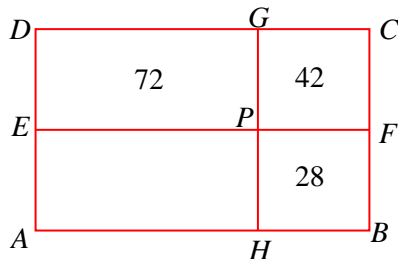
$$2N = \underbrace{54 + 54 + \dots + 54 + 54}_{27}$$

$$\therefore N = \frac{27 \times 54}{2} = 27^2 = 729$$

答：【729】

22. 如下图所示, 长方形 $DEPG$, 长方形 $GPFC$ 及长方形 $PHBF$ 的面积分别为 72, 42 及 28。求长方形 $ABCD$ 的面积。

As shown in the figure below, the rectangles $DEPG$, $GPFC$ and $PHBF$ have areas 72, 42 and 28 respectively. Find the area of rectangle $ABCD$.



$$\begin{cases} xz = 72 & \text{----- (1)} \\ wz = 42 & \text{----- (2)} \\ wy = 28 & \text{----- (3)} \end{cases}$$

$$\frac{(1) \times (3)}{(2)} \text{ 得: } xy = \frac{72 \times 28}{42} = 48$$

因此, 长方形 $ABCD$ 的面积为 $72 + 48 + 42 + 28 = 190$ 。

答: 【190】

23. 若 S 为 2018 的所有正的因数之和, 求 $\left\lfloor \frac{S}{10} \right\rfloor$ 。

If S is the sum of all the positive factors of 2018, find $\left\lfloor \frac{S}{10} \right\rfloor$.

2018 的质因数连乘积为 $2018 = 2 \times 1009$ 。

2018 的正的因数之和为 $S = (1 + 2)(1 + 1009) = 3030$ 。

因此, $\left\lfloor \frac{S}{10} \right\rfloor = 303$ 。

答: 【303】

24. 已知 $\frac{7a-2b}{2a-b} = \frac{28}{5}$, 求 $\frac{14a^2+24b^2}{5ab}$ 的值。

Given that $\frac{7a-2b}{2a-b} = \frac{28}{5}$, find the value of $\frac{14a^2+24b^2}{5ab}$.

$$\frac{7a-2b}{2a-b} = \frac{28}{5}$$

$$35a-10b = 56a-28b$$

$$21a = 18b$$

$$\frac{a}{b} = \frac{6}{7}$$

因此,

$$\begin{aligned}\frac{14a^2+24b^2}{5ab} &= \frac{14}{5} \times \frac{a}{b} + \frac{24}{5} \times \frac{b}{a} \\ &= \frac{14}{5} \times \frac{6}{7} + \frac{24}{5} \times \frac{7}{6} \\ &= \frac{12}{5} + \frac{28}{5} \\ &= 8\end{aligned}$$

答: 【8】

25. 下图所示是一个有 39 行及 39 列的方格纸。在每一个方格内填入一个等于行数与列数之和的数，例如在第 3 行及第 4 列填入的数为 $3+4=7$ 。在所有的 39×39 个方格中，有多少个所填入的是奇数？

The figure below shows a grid paper with 39 rows and 39 columns. In each box, a number which is equal to the sum of the row number and the column number is filled. For example, the number filled in the 3rd row and the 4th column is $3+4=7$. Among all 39×39 boxes, how many of the numbers filled are odd numbers?

2	3	4	5		40
3	4	5	6		41
4	5	6	7		42
5	6	7	8		43
40	41	42	43		78

若第 i 行第 j 列填入的数是奇数，则 i 是奇数， j 是偶数，或 i 是偶数， j 是奇数。1 到 39 中，有 20 个奇数，19 个偶数。因此，填入奇数的方格有

$$20 \times 19 + 19 \times 20 = 760 \text{ 个}$$

答：【760】

第 26 至第 30 题，问答题，每题 8 分。

Question 26 to Question 30, short questions, each question carries 8 marks.

26. 有一群学生，其中有 48 人会弹钢琴，28 人会弹吉他，13 人两者都不会。问这群学生至少有多少人？

In a group of students, 48 of them play piano, 28 of them play guitar, 13 of them do not play any of the two instruments. What is the minimum number of students in this group?

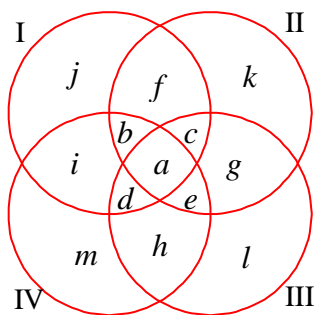
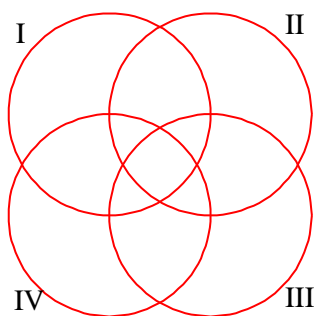
若每个会弹吉他的人都会弹钢琴，则这群学生人数达到最小值。

因此，这群学生至少有 $48+13=61$ 人。

答：【61】

27. 如下图所示，四个圆相交而分割形成 13 个区域，每个圆包含 7 个区域。将由 3 到 15 的 13 个整数填入这 13 个区域中，每个区域一个数，且没有两个区域填入相同的数。设 S_1, S_2, S_3 及 S_4 分别为 I, II, III 及 IV 各圆所包含区域中的数之和，且设 $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ ，求 S 的最大可能值。

As shown in the figure below, four circles intersect each other and form 13 regions, with each circle containing 7 regions. Thirteen integers, 3 to 15, are to be filled into these 13 regions, one number for each region, and no two regions sharing the same number. Let S_1, S_2, S_3 and S_4 be the sum of the numbers in the regions enclosed by the circles I, II, III and IV respectively, and let $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$. Find the largest possible value of S .



$$S_1 = a + b + c + d + f + i + j$$

$$S_2 = a + b + c + e + f + g + k$$

$$S_3 = a + c + d + e + g + h + l$$

$$S_4 = a + b + d + e + h + i + m$$

$$S = 4a + 3b + 3c + 3d + 3e + 2f + 2g + 2h + 2i + j + k + l + m$$

当 S 最大时，

$$\begin{aligned} S &= 4 \times 15 + 3 \times (14 + 13 + 12 + 11) + 2 \times (10 + 9 + 8 + 7) + 6 + 5 + 4 + 3 \\ &= 60 + 150 + 68 + 18 \\ &= 296 \end{aligned}$$

答：【296】

28. 已知 340, 532 及 628 三数除以 n 时的余数相等, 求 n 的最大可能值。

Given that when the three numbers 340, 532 and 628 are divided by n , their remainders are the same. Find the largest possible value of n .

$$532 - 340 = 192$$

$$628 - 532 = 96$$

192 及 96 都能被 n 整除。因此, n 的最大可能值是 96。

答: 【96】

29. 张老师将巧克力分给 x 位男生及 y 位女生, 男生每人 4 粒, 女生每人 5 粒, 一共分出 1231 粒。问 (x, y) 有多少组不同的可能值?

Ms Zhang gives chocolates to x boys and y girls. Each boy gets 4 chocolates and each girl gets 5. She gives away a total of 1231 chocolates. How many different possible combinations of (x, y) are there?

$4x + 5y = 1231$ 所有可能的非负整数解有

$$x = 4, \quad y = 243$$

$$x = 9, \quad y = 239$$

$$x = 14, \quad y = 235$$

⋮

$$x = 304, \quad y = 3$$

$$304 = 5 \times 60 + 4$$

∴ (x, y) 有 61 组不同的可能值。

答: 【61】

30. 有多少组正整数 (a, b, c) 满足 $a \leq b \leq c$ 且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$?

How many triples of positive integers (a, b, c) are there that satisfy $a \leq b \leq c$ and $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$?

显然的, $a \geq 2, b \geq 2, c \geq 2$ 。

则 $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{3}{a}$, 即 $a \leq 3$ 。

因此, $a = 2$ 或 $a = 3$ 。

若 $a = 2$, 则 $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$ 。

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{2} \text{ 且 } \frac{2}{b} \geq \frac{1}{2},$$

即 $2 < b \leq 4$

$b = 3$ 或 4

当 $b = 3, c = 6$

当 $b = 4, c = 4$

若 $a = 3, b = c = 3$

因此, 满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ 及 $a \leq b \leq c$ 的正整数解有 $(2, 3, 6)$, $(2, 4, 4)$ 及 $(3, 3, 3)$, 共 3 组。

答: 【3】