~~ 说明 ~~

~~ Notes ~~

在这份试卷中，$\lfloor x \rfloor$ 表示小于或等于 x 的最大整数。

例如：$\lfloor 2 \rfloor = 2$，$\lfloor -2 \rfloor = -2$，$\lfloor 2.6 \rfloor = 2$，$\lfloor -2.6 \rfloor = -3$。

In this paper, $\lfloor x \rfloor$ denotes the greatest integer less than or equal to x.

For example, $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor -2 \rfloor = -2$, $\lfloor 2.6 \rfloor = 2$, $\lfloor -2.6 \rfloor = -3$.

第 1 至第 10 题，选择题，每题 4 分。

Question 1 to Question 10, multiple choice questions, each question carries 4 marks.

1. $4567^{4567} \equiv 7^{4567} \mod 10$

$$7^1 \equiv 7 \mod 10$$
$$7^2 \equiv 9 \mod 10$$
$$7^3 \equiv 3 \mod 10$$
$$7^4 \equiv 1 \mod 10$$
$$7^{4567} \equiv 7^{4\times 1141} \times 7^3 \equiv 3 \mod 10$$

因此，4567^{4567} 的个位数是 3。

2.

$$\begin{aligned} y &= (1-x)(3-x)(1+x)(3+x) \\ &= (1-x^2)(9-x^2) \\ &= 9-10x^2+x^4 \\ &= (x^2-5)^2-16 \end{aligned}$$

当 $x^2 = 5$ 时，y 有最小值 -16。

3. $\sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{11-2\sqrt{18}} = \sqrt{\left(\sqrt{9}-\sqrt{2}\right)^2} = 3-\sqrt{2}$

方程式 $x^2+ax+b=0$ 的两个根为 $3-\sqrt{2}$ 及 $3+\sqrt{2}$，

$$a = -\left(3+\sqrt{2}\right)-\left(3-\sqrt{2}\right) = -6$$
$$b = \left(3+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right) = 7$$
$$\therefore \quad a+b=1$$

4. 设长方形原本的长是 x，宽是 y，则后来的长是 $1.2x$，宽是 $0.9y$。因此，后来的面积是

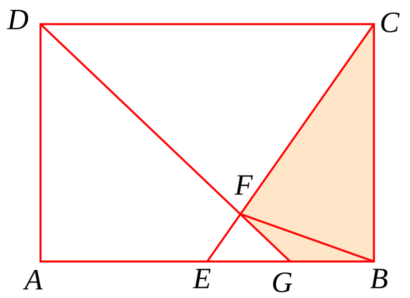
$$1.2x \times 0.9y = 1.08xy$$

因此，面积增加了 8%。

5. 一个正 n 边形的每一个顶点都可以与除它本身及它相邻的两个顶点以外的其他 $(n-3)$ 个顶点形成一对角线。但每一条对角线有两个端点。因此，正 n 边形有 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线。

$$\frac{n(n-3)}{2} = 119$$
$$n^2 - 3n - 238 = 0$$
$$(n-17)(n+14) = 0$$
$$\therefore \quad n = 17$$

6.



$$\frac{EG}{AB} = \frac{EG}{CD} = \frac{EF}{FC} = \frac{1}{5}$$
$$\frac{EG}{EB} = \frac{EG}{\frac{1}{2}AB} = \frac{2}{5}$$
$$\frac{S_{\Delta BCE}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4}$$
$$\frac{S_{\Delta BEF}}{S_{\Delta BCE}} = \frac{EF}{EC} = \frac{1}{6}$$
$$\frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta BEF}} = \frac{EG}{EB} = \frac{2}{5}$$
$$\therefore \quad \frac{S_{\Delta EFG}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{60}$$
$$\frac{S_{BCFG}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{\Delta BCE} - S_{\Delta EFG}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{60} = \frac{7}{30}$$

7.

$$b+c=3ar \quad ------ \quad (1)$$
$$a+c=3br \quad ------ \quad (2)$$
$$a+b=3cr \quad ------ \quad (3)$$

$(1)+(2)+(3)$ 得：

$2(a+b+c)=3(a+b+c)r$

$\therefore\quad a+b+c=0$ 或 $r=\dfrac{2}{3}$

若 $a+b+c=0$，$r=\dfrac{-a}{3a}=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore\quad r=\dfrac{2}{3}$ 或 $r=-\dfrac{1}{3}$

8. 设 A 有 x 个奇数元素，y 个偶数元素。则 (x,y) 可以是 $(1,0)$，$(2,0)$，$(3,0)$，$(2,1)$，$(3,1)$，$(3,2)$。

$(x,y)=(1,0)$ 的 A 有 3 个。

$(x,y)=(2,0)$ 的 A 有 3 个。

$(x,y)=(3,0)$ 的 A 有 1 个。

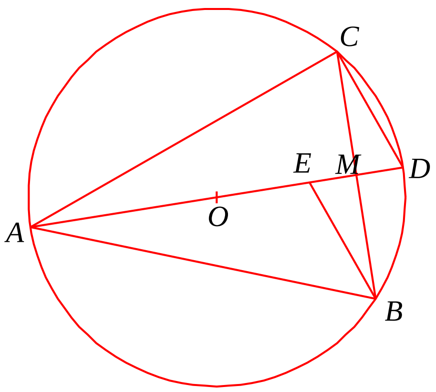
$(x,y)=(2,1)$ 的 A 有 $3\times3=9$ 个。

$(x,y)=(3,1)$ 的 A 有 $1\times3=3$ 个。

$(x,y)=(3,2)$ 的 A 有 $1\times3=3$ 个。

满足条件的子集合 A 共有 22 个。

9.



设 $OD=r$，

$$OD \perp BC\text{，}\quad BM = CM = 7 \quad \text{(半径垂直平分弦)}$$

$$\angle DCM = \angle EBM \quad (BE /\!/ CD\text{，内错角相等})$$

$$\Delta CDM \equiv \Delta BEM \quad \text{(ASA)}$$

$$DM = EM = \frac{1}{4}r\text{，}\quad OM = \frac{3}{4}r$$

$$CM = \sqrt{r^2 - \frac{9}{16}r^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}r = 7$$

$$OD^2 = r^2 = 112$$

10.

$$\left\lfloor \frac{1^2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3^2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4^2}{3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{30^2}{3} \right\rfloor$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \left\lfloor \frac{(3k-2)^2}{3} \right\rfloor + \sum_{k=1}^{10} \left\lfloor \frac{(3k-1)^2}{3} \right\rfloor + \sum_{k=1}^{10} \left\lfloor \frac{(3k)^2}{3} \right\rfloor$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \left\lfloor \frac{9k^2 - 12k + 3 + 1}{3} \right\rfloor + \sum_{k=1}^{10} \left\lfloor \frac{9k^2 - 6k + 1}{3} \right\rfloor + \sum_{k=1}^{10} \left\lfloor \frac{9k^2}{3} \right\rfloor$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \left(3k^2 - 4k + 1\right) + \sum_{k=1}^{10} \left(3k^2 - 2k\right) + \sum_{k=1}^{10} \left(3k^2\right)$$

$$= 9 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 6 \times \frac{10 \times 11}{2} + 10$$

$$= 3145$$

11. 设 $x = 499$，则 $999 = 2x + 1$。

$$\begin{aligned} \sqrt{499^2 + 999} &= \sqrt{x^2 + 2x + 1} \\ &= \sqrt{(x+1)^2} \\ &= x + 1 \\ &= 500 \end{aligned}$$

12. 四位数大于 999，少于 10000 的整数。

少于 10000 的正整数中，有 $\left\lfloor \frac{10000}{15} \right\rfloor = 666$ 个能被 15 整除。

少于 1000 的正整数中，有 $\left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor = 66$ 个能被 15 整除。

因此，能被 15 整除的四位数有 $666 - 66 = 600$ 个

13. $\log_{10} 2^{360} = 360\log_{10} 2 = 360\times 0.3010 = 108.36$

$$108 < \log_{10} 2^{360} < 109$$

$$10^{108} < 2^{360} < 10^{109}$$

$\therefore$ 2^{360} 有 109 位数。

14.

$$f(x, y) = 9x^2 + 30xy + 25y^2 + 4x^2 + 4x + 18$$
$$= (3x+5y)^2 + (2x+1)^2 + 17$$
$$\geq 17$$

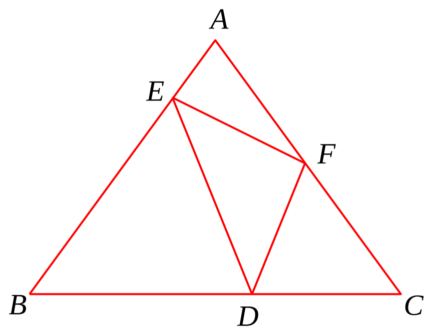
当 $3x+5y=0$，$2x+1=0$，即，$x=-\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{3}{10}$，$f(x, y)$有最小值 17。

15. 设丽芬跑一圈需要 x 分钟。

利明在相遇前跑了的路程，等于丽芬在相遇后所跑的路程，即一圈的 $\dfrac{9}{x}$。因此，利民花了 $10\times\dfrac{9}{x}$ 分钟来跑这段路程；而丽芬在相遇前跑了 $x-9$ 分钟。因此，

$$\frac{90}{x} = x - 9$$
$$x^2 - 9x - 90 = 0$$
$$(x-15)(x+6) = 0$$
$$\therefore \quad x = 15$$

16.



$$\angle B = \angle C = \frac{180^\circ - 76^\circ}{2} = 52^\circ$$

$$\angle BED = \angle BDE = \frac{180^\circ - 52^\circ}{2} = 64^\circ, \quad \angle CDF = \angle CFD = 64^\circ$$

$$\angle EDF = 180^\circ - 64^\circ - 64^\circ = 52^\circ$$

设$\angle DEF = 7\alpha$， $\angle DFE = 9\alpha$

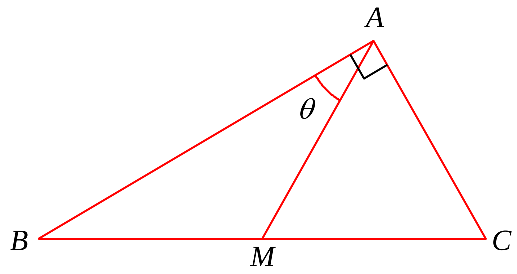
$$52° + 7\alpha + 9\alpha = 180°$$
$$16\alpha = 128°$$
$$\alpha = 8°$$
$$x° = 180° - 64° - 7 \times 8° = 60°$$
$$x = 60$$

17. 若N是最小的，则N尽可能越少位数越好，这表示让N有越多位数是9越好。

$$2017 = 224 \times 9 + 1$$

因此，N的第一位数是1，其余224位数是9。N有225位数。

18.



$$BM = MC = AM = 15$$
$$\angle B = \theta$$
$$\sin\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{18}{2\times 15} = \frac{3}{5}$$
$$\cos\theta = \frac{4}{5}$$
$$\frac{120}{\cos\theta} = 120 \times \frac{5}{4} = 150$$

19. $1+2+3+4+5+4+3+2+1=25$

$$\frac{1}{\frac{25}{2013}} < S < \frac{1}{\frac{25}{2021}}$$
$$\frac{2013}{25} < S < \frac{2021}{25}$$
$$\therefore \quad 80 = \frac{2000}{25} < S < \frac{2025}{25} = 81$$
$$\lfloor S \rfloor = 80$$

20. 设 $\alpha=\sqrt{3}+1$， $\beta=1-\sqrt{3}$， 则 $\alpha+\beta=2$， $\alpha\beta=-2$ 。

我们注意到， $-1<\beta<0$ 。

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=20$

$\alpha^6+\beta^6=\left(\alpha^3+\beta^3\right)^2-2\alpha^3\beta^3=416$

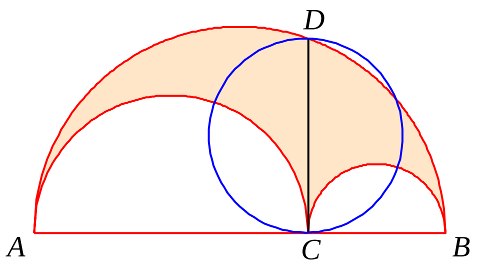
$0<\beta^6<1$， 因此， $415<\alpha^6<416$ ， $\left\lfloor\left(\sqrt{3}+1\right)^6\right\rfloor=415$

21. 由算术—几何平均值不等式，

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{3}&=\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}+\frac{z^2}{9}+\frac{z^2}{9}\\&\ge 6\sqrt[6]{\frac{x^2}{4}\times\frac{x^2}{4}\times\frac{y^2}{4}\times\frac{z^2}{9}\times\frac{z^2}{9}\times\frac{z^2}{9}}\\&=\sqrt[6]{x^4y^2z^6}\\&=2\end{aligned}$$

当 $\frac{x^2}{4}=\frac{y^2}{4}=\frac{z^2}{9}=\frac{1}{3}$ 时， $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{3}$ 有最小值 2。

22.



设 $AC=2a$ ， $BC=2b$ ， 则由 $\frac{AC}{CD}=\frac{CD}{BC}$ 得 $CD=2\sqrt{ab}$ 。

$$S_1=\frac{\pi(a+b)^2-\pi a^2-\pi b^2}{2}=\pi ab$$

$$S_2=\pi\left(\sqrt{ab}\right)^2=\pi ab$$

因此， $\left\lfloor\frac{120S_1}{S_2}\right\rfloor=120$

23. 设 $\log_9 p=\log_{12} q=\log_{16}(6p+q)=k$， 则

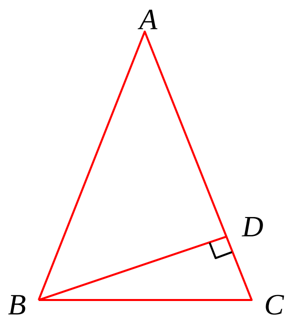
$$p=9^k \qquad ------ \ (1)$$
$$q=12^k \qquad ------ \ (2)$$
$$6p+q=16^k \qquad ------ \ (3)$$

$\frac{(2)}{(1)}$ 得: $\qquad x=\left(\frac{4}{3}\right)^k$

$\frac{(3)}{(2)}$ 得: $\qquad \frac{6}{x}+1=\left(\frac{4}{3}\right)^k$

$$x=1+\frac{6}{x}$$
$$x^2-x-6=0$$
$$(x-3)(x+2)=0$$
$$\because \quad x>0, \quad \therefore \quad x=3$$
$$\lfloor 10x \rfloor=30$$

24.



设 $AB=AC=b$， $AD=d$， 则 b 与 d 都是整数。

$$b^2-d^2=BD^2=85$$
$$(b+d)(b-d)=85$$

只有两个可能性:

- $b+d=85$， $b-d=1$， 则 $b=43$， $d=42$；
- $b+d=17$， $b-d=5$， 则 $b=11$， $d=6$。

由此可得， AC 的最小可能值是 11。

25. $1\underbrace{000\ldots000}_{2016\ 0\text{'s}}1=10^{2017}+1$ 不能被 2，3 及 5 整除。

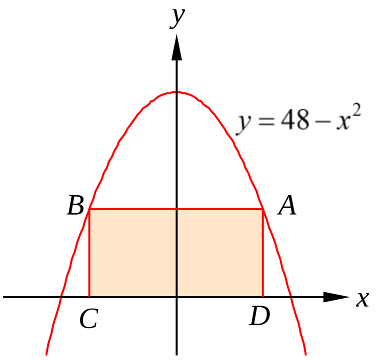
$$10^1\equiv 3 \mod 7$$
$$10^2\equiv 2 \mod 7$$
$$10^3\equiv -1 \mod 7$$
$$10^6\equiv 1 \mod 7$$
$$10^{2017}\equiv 10^{6\times 336+1}\equiv 10\equiv 3 \mod 7$$

因此，$1\underbrace{000\ldots000}_{2016个0}1$ 除以 7 余 4，所以 7 不是它的质因数。

$$10^{2017}\equiv(-1)^{2017}=-1 \mod 11$$

因此，$1\underbrace{000\ldots000}_{2016个0}1$ 可以被 11 整除，11 是它的最小的正质因数。

26.



设点 A 为 $(a,48-a^2)$，则长方形 $ABCD$ 的面积为

$$A=2a(48-a^2)$$

由算术—几何平均值不等式，

$$2a^2(48-a^2)^2=2a^2\times(48-a^2)\times(48-a^2)\le\left(\frac{2a^2+48-a^2+48-a^2}{3}\right)^3=2^{15}$$

$$\therefore\quad A^2=2\times 2a^2(48-a^2)^2\le 2^{16}$$

即，当 $2a^2=48-a^2$ 时，A 有最大可能值 $2^8=256$。

27. 若 $x=0$， $f(0,y)=6$ 。

若 $x\neq 0$， $f(x,y)=\dfrac{12+6u+6u^2}{1+u+u^2}$，其中 $u=\dfrac{y}{x}$ 。

$$\begin{aligned}\frac{12+6u+6u^2}{1+u+u^2}&=\frac{6}{1+u+u^2}+6\\&=\frac{6}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+6\end{aligned}$$

当 $u=-\dfrac{1}{2}$ 时， $\left(u+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ 有最小值 $\dfrac{3}{4}$，

$\dfrac{6}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+6$ 有最大值 $\dfrac{6}{\frac{3}{4}}+6=14$ 。

$\therefore$ 当 $x=-2y$ ， $f(x,y)=\dfrac{12x^2+6xy+6y^2}{x^2+xy+y^2}$ 有最大可能值 14。

28.

$$\begin{aligned}A_{n+1}-A_n&=\frac{30^{n+1}+15^{n+1}}{(n+1)!}-\frac{30^n+15^n}{n!}\\&=\frac{30^{n+1}+15^{n+1}-(n+1)(30^n+15^n)}{(n+1)!}\\&=\frac{30^n(30-n-1)+15^n(15-n-1)}{(n+1)!}\\&=\frac{30^n(29-n)+15^n(14-n)}{(n+1)!}\end{aligned}$$

当 $n\geq 29$， $29-n\leq 0$， $14-n<0$ 。因此， $A_{n+1}-A_n<0$ 。所以， $A_{29}>A_{30}>A_{31}>\ldots$

当 $n\leq 14$， $29-n\geq 0$， $14-n\geq 0$ 。因此， $A_{n+1}-A_n>0$ 。所以， $A_{15}>A_{14}>A_{13}>\ldots$

当 $15\leq n\leq 28$，

$$0<\frac{n-14}{29-n}\leq\frac{28-14}{29-28}\leq 2^n$$

因此， $30^n(29-n)+15^n(14-n)>0$， $A_{n+1}>A_n$ 。所以， $A_{29}>A_{28}>A_{27}>\ldots>A_{15}$

由此可得，当 $n=29$ 时， A_n 的值最大。

29. $P=a+b+c$，因此，$A=\dfrac{a+b+c}{2}$。由三角形面积的希罗公式，

$$A=\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{16}}$$

因此，

$$\frac{(a+b+c)^2}{4}=\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}{16}$$
$$4(a+b+c)=(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)$$

设$b+c-a=x$，$a+c-b=y$，$a+b-c=z$，则x，y，z都是正整数且

$a+b+c=x+y+z$，

$a=\dfrac{y+z}{2}$，$b=\dfrac{x+z}{2}$，$c=\dfrac{x+y}{2}$

$$xyz=4(x+y+z)$$

由x，y，z的定义可得它们必须同是奇数或同是偶数，由$xyz=4(x+y+z)$则得x，y，z必须同是偶数。因此，可设$x=2x'$，$y=2y'$，$z=2z'$。

因此，

$$x'y'z'=x'+y'+z'$$

不失一般性，可设$x'\ge y'\ge z'$。则$x'y'z'\le 3x'$，$y'z'\le 3$。

因此，$z'^2\le 3$，$z'=1$。

$x'y'=x'+y'+1$，即$(x'-1)(y'-1)=2$。因此，$(y'-1)^2\le 2$，$y'-1=1$，$x'-1=2$。即，

$x'=3$，$y'=2$，$z'=1$，此时$a=3$，$b=4$，$c=5$，$A=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{x+y+z}{2}=6$。

因此，A的最大可能值是 6。

30. n^n+1可以被30整除若且唯若它可以被2，3，5整除。

若$n\equiv 0 \bmod 2$，$n^n+1\equiv 1 \bmod 2$。

若$n\equiv 1 \bmod 2$，$n^n+1\equiv 0 \bmod 2$。

n^n+1可以被2整除若且唯若$n\equiv 1 \bmod 2$。

若$n\equiv 0 \bmod 3$，$n^n+1\equiv 1 \bmod 3$。

若$n\equiv 1 \bmod 3$，$n^n+1\equiv 2 \bmod 3$。

若$n\equiv -1 \bmod 3$，$n^n+1\equiv (-1)^n+1 \bmod 3$。

n^n+1可以被3整除若且唯若$n\equiv 1 \bmod 2$且$n\equiv -1 \bmod 3$，即$n=6k+5$。

若$n\equiv 0 \bmod 5$，$n^n+1\equiv 1 \bmod 5$。

若$n\equiv 1 \bmod 5$，$n^n+1\equiv 2 \bmod 5$。

若$n\equiv \pm 2 \bmod 5$，$n^n+1\equiv (\pm 2)^{6k+5}+1\equiv (\pm 2)^{2k+1}+1\equiv (-1)^k(\pm 2)+1\neq 0 \bmod 5$。

若$n\equiv -1 \bmod 5$，$n^n+1\equiv (-1)^n+1 \bmod 5$。

n^n+1可以被30整除若且唯若$n\equiv 1 \bmod 2$，$n\equiv -1 \bmod 3$，且$n\equiv -1 \bmod 5$，即$n=30k+29$。

小于1000的整数中，形如$30k+29$的最大的n是$30\times 33-1=989$。