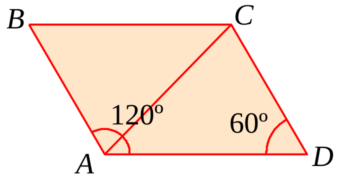
1. 设惠兰买入鞋子的价钱是 p，标价比原价高 $x\%$。则

$$p\times\frac{100+x}{100}\times\frac{80}{100}=p$$
$$x=25$$

2.

$$\angle D=60^\circ$$
$$\ell^2=AC^2=5^2+3^2-2\times5\times3\times\cos60^\circ$$
$$=19$$



3. $x=\dfrac{23.2\times0.049}{0.0031}\approx\dfrac{20\times0.05}{0.003}\approx\dfrac{1000}{3}\approx333$

4.

$$2413\equiv13 \quad \text{mod } 24$$
$$9+12=22$$

因此，2413 小时之后的时间是 $22:00$。

5.

$$\begin{aligned}&1+2-3+4+5-6+7+8-9+\ldots+100+101-102\\&=0+3+6+9+\ldots+99\\&=3(1+2+3+\ldots+33)\\&=3\times\frac{33\times34}{2}\\&=1683\end{aligned}$$

6. $x=1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{x}}=1+\dfrac{x}{2x+1}$

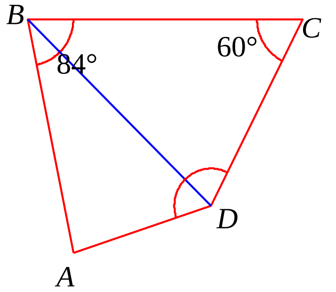
$$2x^2-2x-1=0$$
$$x=\frac{2+\sqrt{4+8}}{4}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

7. 设四分之一圆的半径为 r，则帽子的斜高为 r，底圆半径为 $\dfrac{\frac{1}{4}\times 2\pi r}{2\pi}=\dfrac{r}{4}$。

因此，$\sin\theta=\dfrac{\frac{r}{4}}{r}=\dfrac{1}{4}$，$\sin^2\theta=\dfrac{1}{16}$。

8. 艾雯及冰冰先选择结账柜台，有 4×3 种选法。最后春兰有 5 种方法选择结账柜台。因此，共有 $4\times 3\times 5=60$ 种方法。

9.



$$\angle CBD=\angle CDB=\frac{180^\circ-60^\circ}{2}=60^\circ$$

ΔBCD 是等边三角形

$$AB=BD$$

$$\angle ABD=84^\circ-60^\circ=24^\circ$$

$$\therefore\ \angle BDA=\frac{180^\circ-24^\circ}{2}=78^\circ$$

$$\angle ADC=78^\circ+60^\circ=138^\circ$$

10. k 的最大可能值为 $\left\lfloor\dfrac{500}{7}\right\rfloor+\left\lfloor\dfrac{500}{7^2}\right\rfloor+\left\lfloor\dfrac{500}{7^3}\right\rfloor=71+10+1=82$

11. $x-y=\dfrac{9}{y}-\dfrac{9}{x}=\dfrac{9(x-y)}{xy}$

$$x\neq y$$

$$\therefore\ 1=\frac{9}{xy}$$

$$\therefore\ xy=9$$

12. 设彦彰投了 x 粒 2 分球，则他投了 $(30-x)$ 粒 3 分球。因此，他的得分是

$$x\times 60\%\times 2+(30-x)\times 40\%\times 3=90\times 0.4=36$$

13. 若 $n\le 3$，原不等式可写成 $4-n+8-n\le 24$

因此，$-6\le n\le 3$ 时，不等式成立。

若 $4\le n\le 8$，原不等式可写成 $n-4+8-n\le 24$

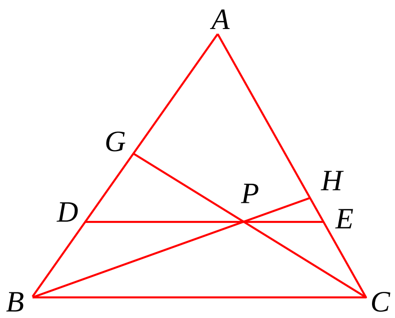
因此，$4\le n\le 8$ 时，不等式成立。

若 $n\ge 9$，原不等式可写成 $n-4+n-8\le 24$

因此，$9\le n\le 18$ 时，不等式成立。

因此，当 $-6\le n\le 18$ 时，不等式成立。这样的整数 n 有 25 个。

14.



$BD=CE=\dfrac{1}{3}$

设 $BG=x$，$CH=y$，则

$$\frac{GD}{BG}=\frac{DP}{BC}$$

$$\frac{x-\frac{1}{3}}{x}=\frac{DP}{BC}$$

$$1-\frac{1}{3x}=\frac{DP}{BC} \qquad ----- \quad (1)$$

$$\frac{HE}{CH}=\frac{EP}{BC}$$

$$\frac{y-\frac{1}{3}}{y}=\frac{EP}{BC}$$

$$1-\frac{1}{3y}=\frac{EP}{BC} \qquad ------ \ (2)$$

$(1)+(2)$得:

$$2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{DP+EP}{BC}$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=2-\frac{DE}{BC}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4$$

$$\frac{120}{BG}+\frac{120}{CH}=120\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=480$$

15. $999\equiv -1 \quad \bmod 1000$

$9999\equiv 999\equiv -1 \quad \bmod 1000$

$\vdots$

$\underbrace{99\cdots 9}_{2017\text{ 个 }9}\equiv 999\equiv -1 \quad \bmod\ 1000$

$n=9\times 99\times 999\times\ldots\times\underbrace{99\cdots 9}_{2017\text{个 }9}$

$\equiv 9\times 99\times(-1)^{2015} \qquad \bmod\ 1000$

$\equiv -891 \qquad \bmod\ 1000$

$\equiv 109 \qquad \bmod\ 1000$

n 的最后三位数字是 109。

16. $C_0: x^2+y^2=10$ 及 $C_2: x^2+y^2+2x+2y=14$ 都经过 A 及 B 两点，解这两个方程式可得这两个圆的交点为 $(3,-1)$ 及 $(-1,3)$。经检验，$(3,-1)$ 及 $(-1,3)$ 这两点在任何的 C_k 上。因此，A 及 B 两点分别为 $(3,-1)$ 及 $(-1,3)$，$d^2=4^2+4^2=32$。

17. 由于$100=2^2\times5^2$，集合A里的元素是所有形如$2^k\times5^l$，其中$-2\le k,l\le2$的数。因此，

$$\begin{aligned}S&=\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}+1+2+2^2\right)\left(\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5}+1+5+5^2\right)\\&=\left(7+\frac{3}{4}\right)\left(31+\frac{6}{25}\right)\\&=217+23+\frac{1}{4}+1+\frac{17}{25}+\frac{9}{50}\\&=242+\frac{11}{100}\end{aligned}$$

因此，$\lfloor S\rfloor=242$。

18. $$\frac{1}{n(n+1)(n+3)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+3}$$

$1=A(n+1)(n+3)+Bn(n+3)+Cn(n+1)\quad ------\ (1)$

将$n=0$代入(1)得：$A=\frac{1}{3}$

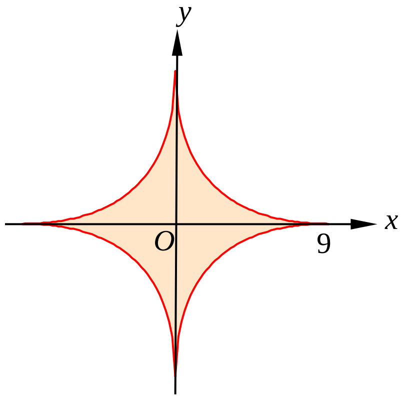
将$n=-1$代入(1)得：$B=-\frac{1}{2}$

将$n=-3$代入(1)得：$C=\frac{1}{6}$

$$\begin{aligned}\therefore\quad 6S_n&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{k}-\frac{3}{k+1}+\frac{1}{k+3}\right)\\&=2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-3\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}+\sum_{k=4}^{n+3}\frac{1}{k}\\&=2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k}\right)-3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}\right)+\left(\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)\\&=\frac{11}{3}-\frac{5}{2}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\\&=\frac{7}{6}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}(360S_n)=60\times\frac{7}{6}=70$$

19.



在第一象限，$\sqrt{y}=3-\sqrt{x}$

$$y=9-6\sqrt{x}+x$$

所求的面积 $=4\int_0^9\left(9-6\sqrt{x}+x\right)dx$

$$=4\left[9x-4x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{2}\right]_0^9$$

$$=4\left(81-108+\frac{81}{2}\right)$$

$$=54$$

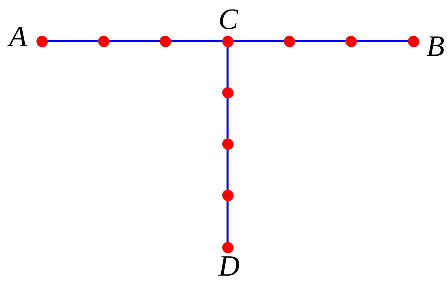
20. $OABC$ 的面积 $=2\times\Delta OAB$ 的面积

$$=\left|36k-84h\right|$$

$$=12\left|3k-7h\right|$$

$3k-7h\neq0$。由于 3 与 7 互质，$3k-7h$ 的最小可能值是 1。因此，$OABC$ 的面积的最小可能值为 12。

21.



我们考虑三种情况：

一、C 不是三角形的顶点，三角形的两个顶点在 AB 上，一个在 CD 上。这样的三角形有 ${}_6C_2 \times {}_4C_1 = 60$ 个。

二、C 不是三角形的顶点，三角形的一个顶点在 AB 上，两个在 CD 上。这样的三角形有 ${}_6C_1 \times {}_4C_2 = 36$ 个。

三、C 是三角形的其中之一个顶点，三角形的另两个顶点，一个在 AB 上，一个在 CD 上。这样的三角形有 ${}_6C_1 \times {}_4C_1 = 24$ 个。

$\therefore$ 能组成的三角形有 $60+36+24=120$ 个。

22. 由于 a 是 b 与 c 的因数，存在着正整数 k 及 l 使得 $b=ka$，$c=la$。

因此，$45=a(1+k+l)$。即，a 是 45 的因数。

$45=3^2\times 5$

45 的因数有 1，3，5，9，15，45 六个。

a	$k+l$	不同的 (k,l) 组合数
1	44	43
3	14	13
5	8	7
9	4	3
15	2	1
45	0	没有

因此，共有 $43+13+7+3+1=67$ 组 (a,b,c) 满足条件。

23.

$$\begin{aligned}2017 &= 7\times 288+1\\ &= 7\times(7\times 41+1)+1\\ &= 7^2\times 41+7\times 1+1\\ &= 7^2\times(7\times 5+6)+7\times 1+1\\ &= 7^3\times 5+7^2\times 6+7\times 1+1\end{aligned}$$

$a_{7^3\times 5}=6999$， $a_{7^3\times 5+7^2\times 6}=8899$， $a_{7^3\times 5+7^2\times 6+7\times 1}=8909$， $a_{2017}=8910$

$\therefore$ a_{2017}的最后三位数是 910。

24. $\sum_{n=1}^{6} n^2 x_n=30$， $\sum_{n=1}^{6}(n+1)^2 x_n=100$， $\sum_{n=1}^{6}(n+2)^2 x_n=250$。

设$(n+3)^2=An^2+B(n+1)^2+C(n+2)^2$。比较系数可得$A=1$， $B=-3$， $C=3$。

$$\begin{aligned}16x_1+25x_2+36x_3+49x_4+64x_5+81x_6 &= \sum_{n=1}^{6}(n+3)^2 x_n\\ &= \sum_{n=1}^{6} n^2 x_n-3\sum_{n=1}^{6}(n+1)^2 x_n+3\sum_{n=1}^{6}(n+2)^2 x_n\\ &= 30-3\times 100+3\times 250\\ &= 480\end{aligned}$$

25. 考虑连续函数 $f(x)=|x-1|+2|x-2|+3|x-3|+\ldots+20|x-20|$ 的值。

当 k 是正整数且 $k\le x\le k+1$，

$$\begin{aligned}f(x)&=2[(x-1)+2(x-2)+\ldots+k(x-k)]\\&\quad-[(x-1)+2(x-2)+\ldots+k(x-k)+(k+1)(x-k-1)+\ldots+20(x-20)]\\&=[k(k+1)-210]x+\left(2870-\frac{k(k+1)(2k+1)}{3}\right)\end{aligned}$$

我们注意到：

当 $k\le 14$， $k(k+1)-210\le 0$，

$f(x)$ 的斜率是负的，

$f(x)$ 在区间 $k\le x\le k+1$ 上递减，

$f(k)\ge f(k+1)$

当 $k\ge 15$， $k(k+1)-210>0$，

$f(x)$ 的斜率是正的，

$f(x)$ 在区间 $k\le x\le k+1$ 上递增，

$f(k)\le f(k+1)$

因此， $f(1)\ge f(2)\ge\ldots\ge f(14)\ge f(15)$， $f(15)\le f(16)\le f(17)\le\ldots$

$\therefore$ 当 $n=15$ 时，S 有最小值

$$\begin{aligned}S_{\min}&=14+2\times 13+3\times 12+\ldots+14\times 1+16\times 1+17\times 2+18\times 3+19\times 4+20\times 5\\&=840\end{aligned}$$

26.

$$(ax^2+by^2)(x+y)=ax^3+by^3+xy(ax+by)$$

$$3(x+y)=4+2xy \qquad ----- \ (1)$$

$$(ax^3+by^3)(x+y)=ax^4+by^4+xy(ax^2+by^2)$$

$$4(x+y)=7+3xy \qquad ----- \ (2)$$

$3\times(1)-2\times(2)$ 得： $x+y=-2$

$$xy=-5$$

$$(ax^4+by^4)(x+y)=ax^5+by^5+xy(ax^3+by^3)$$

$$\begin{aligned}ax^5+by^5&=7\times(-2)-(-5)\times 4\\&=6\end{aligned}$$

27.

$$n = 1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{111\ldots111}_{2016\text{个}1}$$

$$= \sum_{k=1}^{2016} \frac{10^k - 1}{9}$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{10\left(10^{2016} - 1\right)}{9} - 2016\right)$$

$$= \frac{10}{9} \times \underbrace{111\ldots111}_{2016\text{个}1} - 224$$

我们注意到，$\underbrace{111\ldots111}_{9\text{个}1} \div 9 = 12345679$

因此，$\frac{10}{9} \times \underbrace{111\ldots111}_{2016\text{个}1} = 10 \times \frac{111111111}{9} \times \left(1 + 10^9 + 10^{18} + \ldots + 10^{2007}\right)$

$$= 10 \times 12345679 \times \left(1 + 10^9 + 10^{18} + \ldots + 10^{2007}\right)$$

$$= \underbrace{\overline{123456790} \ldots \overline{123456790}}_{224\text{个}}$$

$n = \underbrace{\overline{123456790} \ldots \overline{123456790}}_{223\text{个}} 123456566$，共有 224 个 1。

28. 由算术—几何平均值不等式可得:

$$x^3y^2z = 3^3 \times 2^2 \times \frac{x}{3} \times \frac{x}{3} \times \frac{x}{3} \times \frac{y}{2} \times \frac{y}{2} \times z$$

$$\le 108 \times \left(\frac{\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{y}{2} + z}{6}\right)^6$$

$$= 108\left(\frac{x + y + z}{6}\right)^6$$

$$= 108$$

因此，当 $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = z = 1$ 时，x^3y^2z 有最大值 108。

29. 若 k 是正整数，则 $f(n)=k$ 若且唯若 $k-\frac{1}{2}<\sqrt{n}<k+\frac{1}{2}$，即

$$k^2-k+\frac{1}{4}<n<k^2+k+\frac{1}{4}$$

$$k^2-k+1\le n\le k^2+k$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{f(n)}+1+\left(\frac{4}{3}\right)^{-f(n)}}{\left(\frac{4}{3}\right)^{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n-f(n)}+\left(\frac{3}{4}\right)^{n}+\left(\frac{3}{4}\right)^{n+f(n)}\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=3$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-f(n)}&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k^2-k+1}^{k^2+k}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{k^2-2k+1}+\left(\frac{3}{4}\right)^{k^2-2k+2}+\ldots\left(\frac{3}{4}\right)^{k^2}\right]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{k^2}\\&=4+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{k^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+f(n)}&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k^2-k+1}^{k^2+k}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+k}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{k^2+1}+\left(\frac{3}{4}\right)^{k^2+2}+\ldots\left(\frac{3}{4}\right)^{k^2+2k}\right]\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{k^2}\\&=3-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{k^2}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{f(n)}+1+\left(\frac{4}{3}\right)^{-f(n)}}{\left(\frac{4}{3}\right)^{n}}=10$$

30. $66=2\times3\times11$。因此，n^n+1是66的倍数若且唯若

(i) $n^n\equiv-1 \mod 2$

(ii) $n^n\equiv-1 \mod 3$

(iii) $n^n\equiv-1 \mod 11$

因此，n不能整除2，3或11，n除以3或11的余数不能是0或1。因此，n只可以等于$-1 \bmod 2$及$\bmod 3$，即$n\equiv-1 \mod 6$。可以验证，当$n\equiv-1 \mod 6$，则n满足(i)及(ii)。

若$k\equiv\pm2 \mod 11$，$k^2\equiv4 \mod 11$，$k^3\equiv\pm8 \mod 11$，$k^4\equiv5 \mod 11$，$k^5\equiv\mp1 \mod 11$。

若$k\equiv\pm3 \mod 11$，$k^2\equiv9 \mod 11$，$k^3\equiv\pm5 \mod 11$，$k^4\equiv4 \mod 11$，$k^5\equiv\pm1 \mod 11$。

若$k\equiv\pm4 \mod 11$，$k^2\equiv5 \mod 11$，$k^3\equiv\pm9 \mod 11$，$k^4\equiv3 \mod 11$，$k^5\equiv\pm1 \mod 11$。

若$k\equiv\pm5 \mod 11$，$k^2\equiv3 \mod 11$，$k^3\equiv\pm4 \mod 11$，$k^4\equiv9 \mod 11$，$k^5\equiv\pm1 \mod 11$。

因此，满足(iii)的整数n可以有以下5种情况：

- $n\equiv-1 \mod 11$，$n\equiv1 \mod 2$
- $n\equiv2 \mod 11$，$n\equiv5 \mod 10$
- $n\equiv-3 \mod 11$，$n\equiv5 \mod 10$
- $n\equiv-4 \mod 11$，$n\equiv5 \mod 10$
- $n\equiv-5 \mod 11$，$n\equiv5 \mod 10$

加上条件(i)及(ii)，则整数n可以有以下5种情况：

- $n\equiv-1 \mod 11$，$n\equiv1 \mod 2$，$n\equiv-1 \mod 3$，即$n\equiv65 \mod 66$。
- $n\equiv2 \mod 11$，$n\equiv5 \mod 10$，$n\equiv-1 \mod 3$，即$n\equiv35 \mod 330$。
- $n\equiv-3 \mod 11$，$n\equiv5 \mod 10$，$n\equiv-1 \mod 3$，即$n\equiv305 \mod 330$。
- $n\equiv-4 \mod 11$，$n\equiv5 \mod 10$，$n\equiv-1 \mod 3$，即$n\equiv95 \mod 330$。
- $n\equiv-5 \mod 11$，$n\equiv5 \mod 10$，$n\equiv-1 \mod 3$，即$n\equiv215 \mod 330$。

因此，满足条件(a)及(b)的正整数n有，

- $n=66k+65$，$k=0$，1，2，…，14
- $n=330k+35$，$k=0$，1，2
- $n=330k+305$，$k=0$，1，2
- $n=330k+95$，$k=0$，1，2
- $n=330k+215$，$k=0$，1，2

一共有$15+3+3+3+3=27$个。