~~ 说明 ~~

~~ **Notes** ~~

在这份试卷中，$\lfloor x \rfloor$表示小于或等于x的最大整数。

例如：$\lfloor 2 \rfloor = 2$，$\lfloor -2 \rfloor = -2$，$\lfloor 2.6 \rfloor = 2$，$\lfloor -2.6 \rfloor = -3$。

In this paper, $\lfloor x \rfloor$ denotes the greatest integer less than or equal to x.

For example, $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor -2 \rfloor = -2$, $\lfloor 2.6 \rfloor = 2$, $\lfloor -2.6 \rfloor = -3$.

第 1 至第 10 题，选择题，每题 4 分。

Question 1 to Question 10, multiple choice questions, each question carries 4 marks.

1. 若现在是星期六下午 3 时正，2018 小时后是星期几?
If it is Saturday and 3:00 p.m. now, what day is it 2018 hours later?

A. 星期天 Sunday　B. 星期二 Tuesday　C. 星期四 Thursday　D. 星期五 Friday　E. 星期六 Saturday

一天有 24 小时。

$$\frac{2018}{24} = 84 + \frac{2}{24}$$

84 可以被 7 整除。因此，2018 小时后是星期六的下午 5 时正。

答：【E】

2. 求$\frac{2-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} + \frac{2+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$。
Find $\frac{2-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} + \frac{2+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$.

A. $\frac{5\sqrt{5}}{2}$　B. $5\sqrt{5}$　C. $\frac{11}{2}$　D. 11　E. 22

$$\frac{2-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} + \frac{2+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{\left(2-\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)+\left(2+\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)} = \frac{2(6+5)}{4} = \frac{11}{2}$$

答：【C】

3. 介于990与1000的整数中，有多少个是质数?

Among the integers between 990 and 1000, how many of them are prime numbers?

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3　　E. 4

$\sqrt{1000} \le 32$

小于32的质数有2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31

偶数不是质数

993，999能被3整除，不是质数

995能被5整除，不是质数

991及997不能被任何小于32的质数整除，所以是质数

答：【C】

4. 循环小数$2.2\dot{4}\dot{5} = 2.245454545\cdots$等于以下哪一个分数?

The repeating decimal $2.2\dot{4}\dot{5} = 2.245454545\cdots$ is equal to which of the following fractions?

A. $\frac{2243}{999}$　　B. $\frac{2243}{990}$　　C. $\frac{2245}{990}$　　D. $\frac{2223}{990}$　　E. $\frac{2223}{999}$

$$\begin{aligned}
2.2\dot{4}\dot{5} &= 2.245454545\cdots \\
&= \frac{22}{10} + \frac{45}{10^3} + \frac{45}{10^5} + \frac{45}{10^7} + \cdots \\
&= \frac{22}{10} + \frac{\frac{45}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} \\
&= \frac{22}{10} + \frac{45}{990} \\
&= \frac{2223}{990}
\end{aligned}$$

答：【D】

5. 一班里有 47 位学生。一次考试后，老师将他们的分数按由小到大的顺序排列为 a_1，a_2，a_3，…，a_{47}。结果老师发现一个规律：对于所有的 $1 \le n \le 47$，

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = n(n+3)$$

最高分是几分?

There are 47 students in a class. After an examination, the teacher arranged the marks in ascending order as a_1, a_2, a_3, …, a_{47}. Then, the teacher discovered a pattern: for all $1 \le n \le 47$,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = n(n+3)$$

What is the highest mark scored?

A. 96 B. 97 C. 98 D. 99 E. 100

最高分是 a_{47}。

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{46} + a_{47} = 47 \times (47+3)$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{46} = 46 \times (46+3)$$
$$\therefore \quad a_{47} = 47 \times (47+3) - 46 \times (46+3) = (47+46)(47-46) + 3 \times (47-46) = 96$$

答：【A】

6. 一个箱子里有 5 粒红球，6 粒黄球及 7 粒白球。若晓兰任意从箱子里拿出若干粒球，则她至少需拿出多少粒球，才能保证至少有两粒球是同样颜色的?

In a box, there are 5 red, 6 yellow and 7 white balls. If Xiao Lan randomly takes out a number of balls from the box, at least how many balls she should take in order to guarantee herself two balls of the same colour?

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7 E. 8

若晓兰拿出 4 粒球，则至少有两粒必须是同样颜色的，因为球的颜色只有三种。

若她只拿出 3 粒球，则有可能刚好三粒的颜色都不一样。因此，答案是 4 粒。

答：【A】

7. 已知 $4 \le x \le 6$，化简 $\sqrt{4x^2-28x+49}+\sqrt{4x^2-52x+169}$ 。

Given that $4 \le x \le 6$, simplify $\sqrt{4x^2-28x+49}+\sqrt{4x^2-52x+169}$.

A. $4x-20$ B. 20 C. $4x+20$ D. $8x-20$ E. 6

$$\begin{aligned}\sqrt{4x^2-28x+49}+\sqrt{4x^2-52x+169} &= \sqrt{(2x-7)^2}+\sqrt{(2x-13)^2}\\ &= |2x-7|+|2x-13|\\ &= 2x-7+(13-2x)\\ &= 6\end{aligned}$$

答：【E】

8. 有多少对正整数 (a,b) 使得 a 与 b 的最大公因数是 $2\times3\times5\times7$， a 与 b 的最小公倍数是 $2^2\times3^2\times5^2\times7$？

How many pairs of positive integers (a,b) are such that the greatest common divisor of a and b is $2\times3\times5\times7$, and the least common multiple of a and b is $2^2\times3^2\times5^2\times7$?

A. 1 B. 2 C. 4 D. 8 E. 16

a 与 b 的因数只有 2，3，5 及 7。

设 $a=2^{m_1}\times3^{m_2}\times5^{m_3}\times7^{m_4}$， $b=2^{n_1}\times3^{n_2}\times5^{n_3}\times7^{n_4}$ 。

则 $\{m_1,n_1\}=\{1,2\}$，$\{m_2,n_2\}=\{1,2\}$，$\{m_3,n_3\}=\{1,2\}$，$m_4=n_4=1$。

这表示 (a,b) 共有 $2\times2\times2=8$ 种可能。

答；【D】

9. 有 3 位学生，每人将一份礼物交给老师后，老师又任意的将这 3 份礼物发给这 3 位学生，每人一份。求没有学生拿回自己的礼物的概率。
3 students, each gives a gift to their teacher. The teacher then randomly distributes the three gifts to these three students, each student one. Find the probability that no student gets back his own gift.

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$ E. $\frac{5}{6}$

将三份礼物分给 3 位学生，有 $3!=6$ 种方法。

设 A_i 是第 i 位学生拿回自己的礼物的事件。$A_1 \cup A_2 \cup A_3$ 是至少有一位学生拿回自己的礼物的事件。

$$\begin{aligned} n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= n(A_1)+n(A_2)+n(A_3)-n(A_1 \cap A_2)-n(A_1 \cap A_3)-n(A_2 \cap A_3)+n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= 3\times 2!-3\times 1+1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

因此没有学生拿回自己的礼物的概率是 $1-P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)=1-\frac{4}{6}=\frac{1}{3}$。

[注：更简单的方法是直接列出将三份礼物分给三位学生的所有 6 种方法，再从中观察其中有几种情况是没人拿回自己的礼物。但是以上所用的方法可以推广到有更多人的情况。]

答：【B】

10. 今年学校来了 6 位高中一的插班生，教务主任要将他们安插在 3 班高中一的班级中，每班两位。有多少种方法?
This year there are 6 new students joining the senior one classes. The head of academics would like to put them into 3 senior one classes, 2 students each. How many ways are there?

A. 15 B. 21 C. 90 D. 120 E. 720

第一班可以从 6 位学生中选 2 位，有 ${}_6C_2=15$ 种方法。

第二班可从剩下的 4 位学生中选 2 位，有 ${}_4C_2=6$ 种方法。

第三班只能拿剩下的 2 位学生，只有一种方法。

因此，有 $15\times 6=90$ 种方法可安插这 6 位插班生。

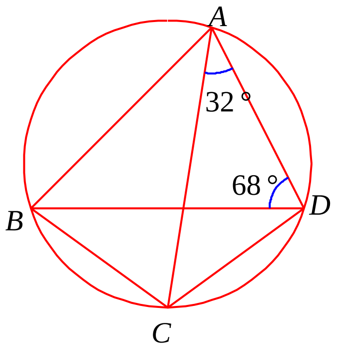
答：【C】

第 11 至第 20 题，问答题，每题 5 分。

Question 11 to Question 20, short questions, each question carries 5 marks.

11. 下图中，$ABCD$ 是圆内接四边形，$CB = CD$，$\angle CAD = 32°$，$\angle ADB = 68°$。若 $\angle ABD = x°$，求 x。

In the figure below, $ABCD$ is a cyclic quadrilateral, $CB = CD$, $\angle CAD = 32°$, $\angle ADB = 68°$. If $\angle ABD = x°$, find x.



$\angle BAC = \angle BDC = \angle CBD = \angle CAD = 32°$

$x = 180 - 68 - 32 - 32 = 48$

答：【48】

12. 17 位学生，编号 1 至 17，按编号顺序围成一个圆圈。他们开始喊号码，编号 1 的学生喊 1，编号 2 的喊 2，依此类推。编号 17 的学生喊 17 后，编号 1 的学生接下去喊 18，编号 2 的喊 19，如此不断继续下去。喊 2018 的学生编号是多少?

17 students, numbered 1 to 17, formed a circle according to their numerical order. They began to count out loud. Student no. 1 called out 1, student no. 2 called out 2, and so on. After student no. 17 called out 17, student no. 1 continued to call out 18, student no. 2 called out 19, and so on. This process continues. What is the number of the student who called out 2018?

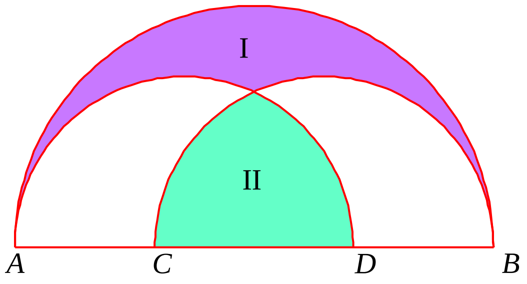
$2018 = 17 \times 118 + 12$

因此，喊 2018 的学生的编号是 12。

答：【12】

13. 下图所示为分别以 AB， AD 及 BC 为直径的半圆，其中 $AB = d_1$， $AD = BC = d_2$。若阴影部分 I 的面积与阴影部分 II 的面积相等，求 $\frac{12d_1^2}{d_2^2}$。

The figure below shows three semicircles with diameters AB, AD and BC respectively, with $AB = d_1$, $AD = BC = d_2$. If the area of the shaded region I is the same as the area of the shaded region II, find $\frac{12d_1^2}{d_2^2}$.



阴影区域 I 的面积 = 以 AB 为直径的半圆的面积 − 以 AD 为直径的半圆的面积 − 以 BC 为直径的半圆的面积 + 阴影区域 II 的面积

因此， $\frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = 2 \times \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$

$$\frac{d_1^2}{d_2^2} = 2$$

$$\frac{12d_1^2}{d_2^2} = 24$$

答：【24】

14. 求$\left\lfloor \frac{3^2}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4^2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5^2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6^2}{4} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{42^2}{40} \right\rfloor$。

Find $\left\lfloor \frac{3^2}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4^2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5^2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6^2}{4} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{42^2}{40} \right\rfloor$.

$$\left\lfloor \frac{(n+2)^2}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2+4n+4}{n} \right\rfloor = n+4+\left\lfloor \frac{4}{n} \right\rfloor$$

因此，

$$\left\lfloor \frac{3^2}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4^2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5^2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6^2}{4} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{42^2}{40} \right\rfloor$$

$$= (1+2+\cdots+40)+4\times 40+\left(\left\lfloor \frac{4}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor\right)$$

$$= \frac{40\times 41}{2}+160+4+2+1+1$$

$$= 988$$

答：【988】

15. 已知$2x^2-7x+4=0$，求$41x-4x^3$的值。

Given that $2x^2-7x+4=0$. Find the value of $41x-4x^3$.

$$2x^2-7x+4=0$$

$$x^2=\frac{7}{2}x-2$$

$$x^3=\frac{7}{2}x^2-2x$$

$$=\frac{49}{4}x-7-2x$$

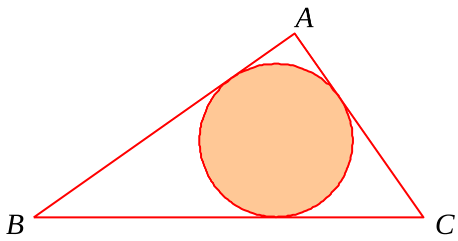
$$=\frac{41}{4}x-7$$

$$\therefore \quad 41x-4x^3=28$$

答：【28】

16. 下图所示为直角 ΔABC 及其内切圆。已知 $\angle A$ 是直角，$AB=15$，$AC=8$，阴影部分(内切圆)的面积为 $S\pi$，求 $42S$ 的值。

The figure below shows a right-angled triangle ΔABC and its inscribed circle. Given that $\angle A$ is a right angle, $AB=15$, $AC=8$, and the area of the shaded region (the inscribed circle) is $S\pi$, find the value of $42S$.



$BC=17$，$s=\dfrac{15+8+17}{2}=20$

ΔABC 的面积 $\Delta=\dfrac{15\times 8}{2}=60$

内接圆的半径 $=\dfrac{\Delta}{s}=3$

$S\pi=\pi\times 3^2$

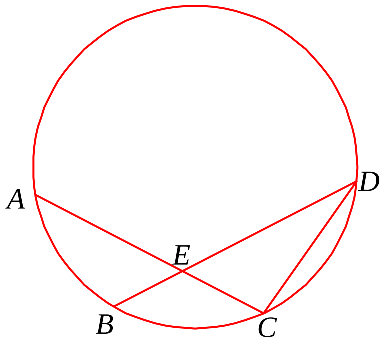
$S=9$

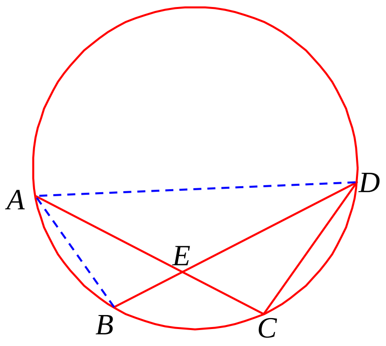
$42S=378$

答：【378】

17. 下图中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$。若 $\angle AED=124°$，$\angle ACD=x°$，求 x。

In the figure below, $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$. If $\angle AED=124°$, $\angle ACD=x°$, find x.





连接 AB 及 AD。

$\because \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$

$\angle ADB = \angle BDC = \angle CAD$

$\therefore$ 这三个角的度数都等于 $\dfrac{180^\circ - 124^\circ}{2} = 28^\circ$

$\angle ACD = 124^\circ - 28^\circ = 96^\circ$

$x = 96$

答：【96】

18. 若 x，y，z 是正数使得

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2}{3}, \quad \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\sqrt{a}}{6}$$

求 a 的值。

If x, y, z are positive numbers such that

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2}{3}, \quad \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\sqrt{a}}{6}$$

Find the value of a.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{a}}{6}\right)^2 = \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2} = 1$$

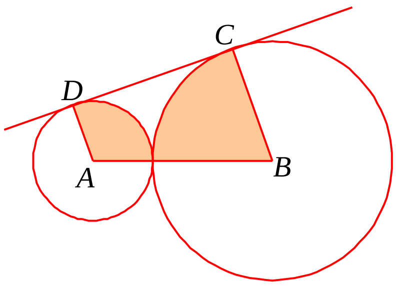
$$\frac{a}{36} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{4}{9} = \frac{36-9-16}{36} = \frac{11}{36}$$

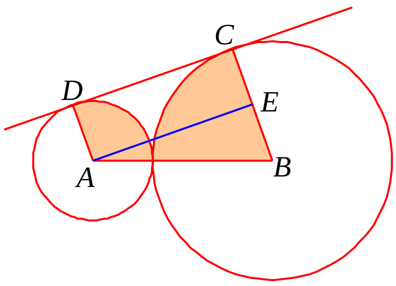
$\therefore \quad a = 11$

答：【11】

19. 下图中，两圆相切，它们的圆心分别为点 A 及点 B。直线 CD 是两圆的公切线，点 C 及点 D 是切点。若两圆的半径分别为 12 及 36，阴影部分的面积为 $a\pi$，求 $\lfloor a \rfloor$。

In the figure below, the two circles are tangent to each other. The centers of the circles are A and B respectively. The line CD is a common tangent to the two circles. C and D are points of tangency. If the radii of the two circles are 12 and 36 respectively, and the area of the shaded region is $a\pi$, find $\lfloor a \rfloor$.





AD 与 BC 分别垂直于 CD。

$AB = 12 + 36 = 48$。

由点 A 作直线 AE 垂直于直线 BC，则 $BE = 36 - 12 = 24$。

$\frac{BE}{AB} = \frac{1}{2}$，$\therefore \quad \angle EAB = \frac{\pi}{6}$

$\angle DAB = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

$\angle CBA = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

$a\pi = \frac{1}{2} \times 12^2 \times \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2} \times 36^2 \times \frac{\pi}{3} = 264\pi$

$\therefore \quad \lfloor a \rfloor = 264$.

答：【264】

20. 在一次周会，老师要学生们排队。参与的学生人数少于 1000 人。无论是 15 人排一行，或 18 人排一行，或 20 人排一行，都会多出一位学生。问参与周会的学生最多有多少人?

In a weekly assembly, the teacher asks the students to line up in rows. The number of students at the assembly is less than 1000. If 15 students line up in a row, or 18 students line up in a row, or 20 students line up in a row, there will always be one student extra. At most how many students are there at the assembly?

设参加周会的学生人数是n 。则$n-1$是 15，18 及 20 的倍数。

15，18，20 的最小公倍数是 180。

由于$n-1\le 999$， $n-1$的最大值是$180\times 5=900$。

因此，n的最大值是 901。

答；【901】

第 21 至第 25 题，问答题，每题 6 分。

Question 21 to Question 25, short questions, each question carries 6 marks.

21. 一函数 f 满足 $f(x)+f(3x+1)=x^2$。若 $f(3)+f(31)=63$，求 $f(10)$的值。

A function f satisfies $f(x)+f(3x+1)=x^2$. If $f(3)+f(31)=63$, find the value of $f(10)$.

将$x=3$及$x=10$分别代入$f(x)+f(3x+1)=x^2$得

$$f(3)+f(10)=9$$
$$f(10)+f(31)=100$$

两式相加得： $f(3)+2f(10)+f(31)=109$

$$2f(10)=109-63$$
$$f(10)=\frac{46}{2}$$
$$=23$$

答：【23】

22. 若x，y是实数且满足$2x^2+5y^2=7x$，求$18x+10y^2$的最大可能值。

If x and y are real numbers such that $2x^2+5y^2=7x$, find the largest possible value of $18x+10y^2$.

$5y^2=7x-2x^2=x(7-2x)$

由于$y^2\ge 0$，$0\le x\le \frac{7}{2}$

$$\begin{aligned}18x+10y^2&=18x+14x-4x^2\\&=64-4(x^2-8x+16)\\&=64-4(x-4)^2\end{aligned}$$

因此，$18x+10y^2$的最大可能值发生在$x=\frac{7}{2}$时

最大值是$64-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=63$

答：【63】

23. 已知$a+b+c=6$，求 $2\times3^a+16\times3^{b-1}+16\times3^{c-2}$ 的最小可能值。

Given that $a+b+c=6$, find the smallest possible value of $2\times3^a+16\times3^{b-1}+16\times3^{c-2}$.

由算术-几何平均值不等式可得

$$\begin{aligned}2\times3^a+16\times3^{b-1}+16\times3^{c-2}&\ge 3\sqrt[3]{2\times3^a\times16\times3^{b-1}\times16\times3^{c-2}}\\&=3\sqrt[3]{2^9\times3^{a+b+c-3}}\\&=3\times2^3\times\sqrt[3]{3^3}\\&=9\times8\\&=72\end{aligned}$$

当$2\times3^a=16\times3^{b-1}=16\times3^{c-2}$，$2\times3^a+16\times3^{b-1}+16\times3^{c-2}$有最小值72。

答：【72】

24. 已知多项式 $f(x)$，它除以 (x^2+1) 得余式 $(2x+3)$，除以 (x^2-1) 得余式 $(-4x+13)$，除以 (x^4-1) 得余式 $r(x)$，求 $r(-3)$ 的值。

Given the polynomial $f(x)$, it leaves a remainder of $(2x+3)$ when divided by (x^2+1), it leaves a remainder of $(-4x+13)$ when divided by (x^2-1), and it leaves a remainder of $r(x)$ when divided by (x^4-1). Find the value of $r(-3)$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x^2+1)g(x)+2x+3 \\
&= (x^2+1)[(x^2-1)h(x)+ax+b]+2x+3 \\
&= (x^4-1)h(x)+(ax+b)(x^2+1)+2x+3
\end{aligned}
$$

$r(x)=(ax+b)(x^2+1)+2x+3$

$f(x)$ 除以 x^2-1 的余式等于 $r(x)=(ax+b)(x^2+1)+2x+3$ 除以 x^2-1 的余式。

$$
\begin{aligned}
(ax+b)(x^2+1)+2x+3 &= (ax+b)(x^2-1)+2(ax+b)+2x+3 \\
&= (ax+b)(x^2-1)+(2a+2)x+(2b+3)
\end{aligned}
$$

因此，$-4x+13=(2a+2)x+(2b+3)$

因此，$a=-3$，$b=5$

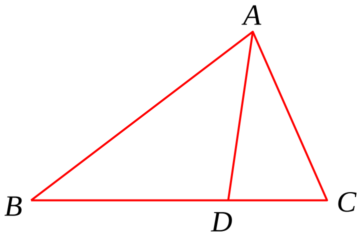
$r(x)=(-3x+5)(x^2+1)+2x+3$

$r(-3)=14\times 10-3=137$

答：【137】

25. 下图中， $BD:CD=2:1$， $AB=20$， $AC=13$， $BC=18$， $AD=x$。求 x^2。

In the figure below, $BD:CD=2:1$, $AB=20$, $AC=13$, $BC=18$, $AD=x$. Find x^2.



$BD=12$， $CD=6$

$$\cos\angle ADC=\frac{AD^2+CD^2-AC^2}{2\times AD\times CD}=\frac{x^2+CD^2-AC^2}{2\times x\times CD}$$

$$\cos\angle ADB=\frac{AD^2+BD^2-AB^2}{2\times AD\times BD}=\frac{x^2+BD^2-AB^2}{2\times x\times BD}$$

$$\angle ADB=180^\circ-\angle ADC$$

$$\cos\angle ADB=-\cos\angle ADC$$

$$\frac{x^2+BD^2-AB^2}{2\times x\times BD}=-\frac{x^2+CD^2-AC^2}{2\times x\times CD}$$

$$x^2+BD^2-AB^2=-2\left(x^2+CD^2-AC^2\right)$$

$$3x^2=AB^2+2\times AC^2-2\times CD^2-BD^2$$

$$x^2=\frac{20^2+2\times 13^2-2\times 6^2-12^2}{3}$$

$$=174$$

答： 【174】

第 26 至第 30 题，问答题，每题 8 分。

Question 26 to Question 30, short questions, each question carries 8 marks.

26. 若$(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+20)$的展开式中$x^{18}$的系数是$a$，求$a$的最后三位数。

If the coefficient of x^{18} in the expansion of $(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+20)$ is a, find the last three digits of a.

要得到含x^{18}的项，必须从 20 个括号中的 18 个取出x，剩余两个括号取出常数项相乘。因此，x^{18}的系数是

$$\begin{aligned} a=\sum_{1\le m<n\le 20} mn &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{20} n\sum_{m=1}^{20} m-\sum_{n=1}^{20} n^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{20\times 21}{2}\right]^2-\frac{20\times 21\times 41}{6}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(210^2-2870\right) \\ &= 20615 \end{aligned}$$

∴ a 的最后三位数是 615。

答：【615】

27. 已知一数列a_1，a_2，a_3，…的定义为

$a_1=1$，$a_2=4$，且对于所有$n\ge 3$，$a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}+n$

设$x=\dfrac{a_{96}-a_{94}}{12}$。求$x$的值。

Given that a sequence a_1, a_2, a_3, …is defined as

$a_1=1$, $a_2=4$, and $a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}+n$ for all $n\ge 3$

Let $x=\dfrac{a_{96}-a_{94}}{12}$. Find the value of x.

由 $a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}+n$ 可得

$$a_n-a_{n-1}-(a_{n-1}-a_{n-2})=n$$
$$a_{n-1}-a_{n-2}-(a_{n-2}-a_{n-3})=n-1$$
$$a_{n-2}-a_{n-3}-(a_{n-3}-a_{n-4})=n-2$$
$$\vdots$$
$$a_4-a_3-(a_3-a_2)=4$$
$$a_3-a_2-(a_2-a_1)=3$$

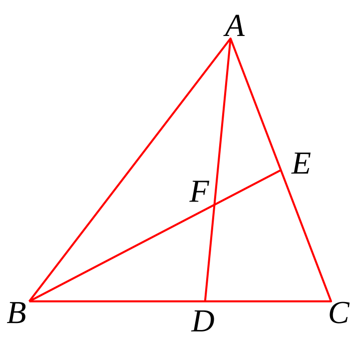
将以上$(n-2)$个式子相加可得

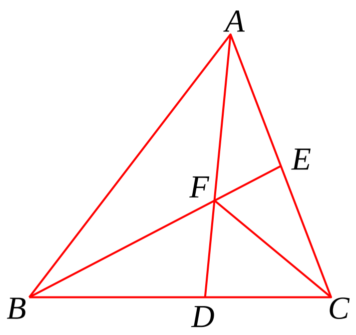
$$(a_n-a_{n-1})-(a_2-a_1)=3+4+\cdots+n$$
$$a_n-a_{n-1}=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$
$$a_{96}-a_{94}=a_{96}-a_{95}+a_{95}-a_{94}$$
$$=\frac{96\times 97}{2}+\frac{95\times 96}{2}$$
$$=96\times 96$$
$$\frac{a_{96}-a_{94}}{12}=96\times 8=768$$

答：【768】

28. 下图中，D，E分别是直线BC及AC上的点，$BD:DC=9:7$，$AE:EC=4:5$。直线AD与BE相交于点F。若$\frac{AF}{FD}=x$，求$360x$的值。

In the figure shown below, D, E are respectively points on the line BC and AC such that $BD:DC=9:7$ and $AE:EC=4:5$. The lines AD and BE intersect at the point F. If $\frac{AF}{FD}=x$, find the value of $360x$.





我们用 $S_{\Delta XYZ}$ 表示 ΔXYZ 的面积。

设 $S_{\Delta CDF}=a$， $S_{\Delta CEF}=b$， 则

$$\frac{S_{\Delta BDF}}{S_{\Delta CDF}}=\frac{BD}{CD}=\frac{9}{7}$$

$$\therefore \quad S_{\Delta BDF}=\frac{9}{7}a$$

$$\frac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta CEF}}=\frac{AE}{EC}=\frac{4}{5}$$

$$\therefore \quad S_{\Delta AEF}=\frac{4}{5}b$$

$$\frac{S_{\Delta BAE}}{S_{\Delta BCE}}=\frac{AE}{CE}=\frac{4}{5}$$

$$\frac{S_{\Delta ABF}+\frac{4}{5}b}{\frac{9}{7}a+a+b}=\frac{4}{5}$$

$$S_{\Delta ABF}=\frac{4}{5}\times\frac{16}{7}a=\frac{64}{35}a$$

$$\begin{aligned}360x&=360\times\frac{AF}{FD}\\&=360\times\frac{S_{\Delta ABF}}{S_{\Delta BDF}}\\&=360\times\frac{\frac{64}{35}a}{\frac{9}{7}a}\\&=512\end{aligned}$$

答：【512】

29. 求 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{300}{2^n\times k+5}$。

Find $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{300}{2^n\times k+5}$.

设 $S_1=\sum_{\substack{k=1\\k\text{ odd}}}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{300}{2^n\times k+5}$， $S_2=\sum_{\substack{k=1\\k\text{ even}}}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{300}{2^n\times k+5}$， 则

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{300}{2^n\times k+5}=S_1-S_2$$

另一方面，

$$\begin{aligned}
S_2&=\sum_{\substack{k=1\\k\text{ even}}}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{300}{2^n\times k+5}\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{300}{2^n\times 2k+5}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{300}{2^{n+1}\times k+5}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{300}{2^n\times k+5}\\
&=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{300}{2^n\times k+5}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\times\frac{300}{k+5}\right)\\
&=\frac{1}{2}(S_1+S_2)-30\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+5}\right)
\end{aligned}$$

因此，

$$\frac{1}{2}(S_1-S_2)=30\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$$

$$\begin{aligned}
S&=60\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\\
&=60+30+20+15+12\\
&=137
\end{aligned}$$

答：【137】

30. 有多少组正整数(a,b,c,d)满足$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$?

How many quadruples of positive integers (a,b,c,d) satisfy $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$?

显然的，$a\geq 2$，$b\geq 2$，$c\geq 2$，$d\geq 2$。

我们先设$a\leq b\leq c\leq d$。

则$1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\leq\frac{4}{a}$，即$a\leq 4$。

因此，$a=2$，3 或 4。

当$a=2$，则$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{2}$。

$\frac{1}{b}<\frac{1}{2}$ 且 $\frac{3}{b}\geq\frac{1}{2}$，

即 $2<b\leq 6$

$b=3$，4，5 或 6

当$b=3$，$\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{6}$

$6<c\leq 12$

$(c,d)=(7,42)$，$(8,24)$，$(9,18)$，$(10,15)$，$(12,12)$

当$b=4$，$\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{4}$

$4<c\leq 8$

$(c,d)=(5,20)$，$(6,12)$，$(8,8)$

当$b=5$，$\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{3}{10}$

$5\leq c\leq 6$

$(c,d)=(5,10)$

当$b=6$，$\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{3}$

$(c,d)=(6,6)$

当$a=3$，则$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{2}{3}$。

$3\leq b\leq 4$

$b=3$或 4

当$b=3$，$\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{3}$

$3<c\leq 6$

$(c,d)=(4,12)$，$(6,6)$

当 $b=4$，$\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{5}{12}$

$4\le c\le 4$

$(c,d)=(4,6)$

当 $a=4$，$b=c=d=4$

因此，满足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$ 及 $a\le b\le c\le d$ 的正整数解有

- $(2,3,7,42)$，$(2,3,8,24)$，$(2,3,9,18)$，$(2,3,10,15)$，$(2,4,5,20)$，$(2,4,6,12)$，
- $(2,3,12,12)$，$(2,4,8,8)$，$(2,5,5,10)$，$(3,3,4,12)$，$(3,4,4,6)$
- $(3,3,6,6)$
- $(2,6,6,6)$
- $(4,4,4,4)$

满足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$ 的正整数解有 $6\times 4!+5\times\frac{4!}{2!}+1\times\frac{4!}{2!\times 2!}+1\times\frac{4!}{3!}+1\times 1=215$ 组。

答：【215】